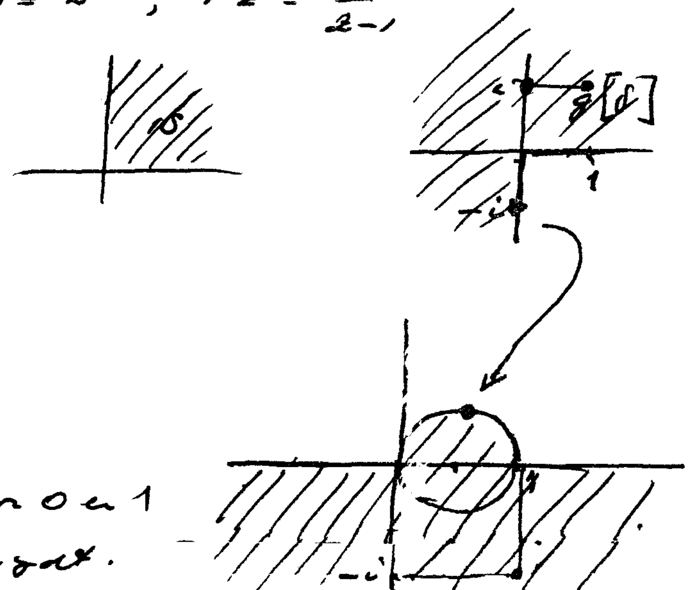
Uitwerking tentamen Complexe-Functietheorie   19-06-2000

1) $f(z) = T(g(z))$ waarin $g(z) = z^3$, $Tz = \frac{z}{z-1}$

$g[\delta]$ is zoals geschetst. We bepalen het beeld onder T:



$$\begin{cases} T0 = 0 \\ T1 = \infty \qquad T(-i) = \frac{i+1}{2} \\ T\infty = 1 \end{cases}$$

T is hoekhouw in $z=0$.

$T[0,\infty] = \mathbb{R} \setminus (0,1)$

$T[0,-i\infty]$ is een cirkel door 0 en 1 die $\mathbb{R}$ in 0 loodrecht snijdt.

$f[\delta]$ het gearceerde vlakdeel. ($T(i+1) = 1-i$)

2 a) f heeft alleen polen in de punten i, $-i$ en -1. Daar $|i-i|=0$, $|-i-i|=2$ en $|-1-i|=\sqrt{2}$ ligt geen van deze punten in $\text{ann}(i,\sqrt{2},2)$. Dus $\text{ann}(i,\sqrt{2},2)$ is een deelverzameling van het gebied waar f analytisch is. Dus f heeft een Laurentontwikkeling op $\text{ann}(i,\sqrt{2},2)$.

b) $f(z) = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} + \frac{c}{z+1}$. Dan $a = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1-i}{(i+i)(1+i)} = -\frac{1}{2}$. Net zo $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$

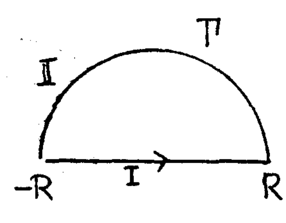
c) Bepaal reeks voor $-\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}$ op $|z-i|<2$ en voor $\frac{1}{z+1}$ op $|z-i|>\sqrt{2}$.

(1) $-\frac{1}{2}\frac{1}{z+i} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-i+2i} = \frac{i}{4}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{i}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k$. $|z-i|<2$

(2) $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-i+1+i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-i)^n}{(z-i)^n} \overset{n+1=-k}{=} \frac{1}{z-i} + \sum_{k=-\infty}^{-2}(-1-i)^{-1-k}(z-i)^k$, $|z-i|>\sqrt{2}$

Dus $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2}(-1-i)^{-1-k}(z-i)^k + \frac{1/2}{z-i} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^k(z-i)^k$.

3) a) $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}$, $I = [-R,R]$, $II = \{Re^{i\varphi};\ 0 \le \varphi \le \pi\}$
$\Gamma = $ "$I + II$"



Voor $R > \sqrt{2}$ ligt de pool van f in $-1+i$ binnen Γ. Neem $R > \sqrt{2}$.

Dus $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) = 2\pi i \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)f(z) = 2\pi i \frac{-1+i}{2i}e^{-1-i} =$

$= \frac{\pi}{e}(-\cos 1 + \sin 1) + i\frac{\pi}{e}(\cos 1 + \sin 1)$

Omdat $\left|\frac{z}{z^2+2z+2}\right| \le \frac{R}{R^2-2R-2}$ als $|z| = R > 2$, en $\lim_{R\to\infty}\frac{R}{R^2-2R-2} = 0$ volgt uit het Lemma van Jordan dat: $\int_{II} f(z)\,dz \to 0$ als $R \to \infty$.

3 (vervolg) Dus $\lim\limits_{R\to\infty} \int_I f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}\left(-\cos 1 + \sin 1\right) + i\,\frac{\pi}{e}\left(\cos 1 + \sin 1\right)$. Vanwege het bestaan van de oneigenlijke integraal: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+2x+2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{e}\left(-\cos 1 + \sin 1\right)$.

b) Bovendien $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \mathrm{Im}\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{e}\left(\cos 1 + \sin 1\right)$.

Dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\left(\cos x + 2\sin x\right)}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\left(\cos 1 + 3\sin 1\right)$.

4. $f(z) := \frac{z^2 \ell(z)}{z^4+1}$ met $\ell(z) = \log|z| + i\arg z$, $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$

In $G := \mathbb{C} \setminus [0, -i\infty)$ heeft $f(z)$ 4 polen, van 1e orde:

$z^4 = -1 \iff z_k = \omega^{2k-1}$; $k = 1,2,3,4$; $\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i)$

$\mathrm{Res}(f, z_k) = \left.\frac{z^2 \ell(z)}{4z^3}\right|_{z_k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z_k}\, i\arg z_k$

$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f(z_2))\right\} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\omega^3}\cdot\frac{3\pi}{4}\right\}$

$= -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\left\{-\omega^3 - 3\omega\right\} = -\frac{\pi^2}{8}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(-1+i) - \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,(1+i)\right)$

$\left|\int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz\right| \leq \pi R.\ \frac{R^2(\log R + \pi)}{-1+R^4} \to 0$ voor $R \to +\infty$

$\left|\int_{\gamma_r^-} f(z)\,dz\right| \leq \pi r\ \frac{r^2\cdot(-\log r + \pi)}{-r^4+1} \to 0$ voor $r \downarrow 0$.

$\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx = \int_{-R}^{-r} \frac{x^2\left(\log|x| + \pi i\right)}{x^4+1}\,dx \overset{u=-x}{=} \int_r^R \frac{u^2\left(\log u + \pi i\right)}{u^4+1}\,du$

Laat $r \downarrow 0$, $R \to +\infty$ gaan. Dan vindt men

$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\oint f(z)\,dz\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{8}\cdot\sqrt{2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$

5 Kies $\Phi(s,t) = s\,\gamma_2(t) + (1-s)\,\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}\left(1 + (1-s)\tfrac{1}{2}e^{8\pi i t}\right)$. Daar $\left|1 + (1-s)\tfrac{1}{2}e^{8\pi i t}\right| \geq 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$ als $0 \leq s \leq 1$ en $0 \leq t \leq 1$, is $\Phi\left([0,1]^2\right) \subset G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Verder $\Phi(0,t) = \gamma_1(t)$, $\Phi(1,t) = \gamma_2(t)$ én $\Phi(s,1) = 1 = \Phi(s,0)$. Tenslotte is Φ ook continu. Dus $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$.

6 N) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}} \overset{x^3=t}{=} \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3}(1-t)^{1/3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{(1/3-1)}(1-t)^{(2/3-1)}\,dt$

$3x^2\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{3}\,\frac{dt}{t^{2/3}}$

$= \frac{1}{3}\,B(1/3, 2/3)$

$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\,\Gamma(1/3)\,\Gamma(1-1/3) = \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{\pi}{3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$