

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4 en 5W;

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, en 6N.

1. Zij

$$f(z) = \frac{z^3}{z^3 - 1}.$$

Bepaal en schets het beeld onder f van het kwartvlak

$$S := \{z \mid \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}.$$

2. Zij

$$f(z) = \frac{1 - z}{(z^2 + 1)(z + 1)}.$$

en

$$\text{ann}(i, \sqrt{2}, 2) = \{z \mid \sqrt{2} < |z - i| < 2\}.$$

- 
- a) Waarom heeft $f(z)$ een Laurent-ontwikkeling op $\text{ann}(i, \sqrt{2}, 2)$?
b) Bepaal de breuksplitsing van $f(z)$.
c) Bepaal de Laurent-ontwikkeling van $f(z)$ op de ring $\text{ann}(i, \sqrt{2}, 2)$.

3. a) Bereken, met behulp van een kringintegraal, de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

b) Bereken ook:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos(x) + 2 \sin(x))}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

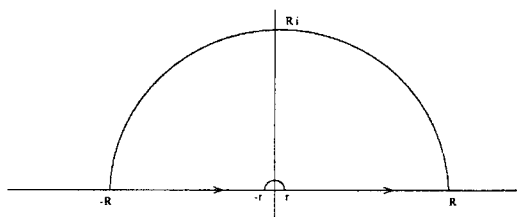
Aanwijzing: De berekening van deze tweede integraal mag niet veel extra rekenwerk eisen.

[Dat de beide gevraagde oneigenlijke integralen convergeren mag zonder bewijs worden gebruikt.]

Z.O.Z.

4. (a) Zij $\log z$ een tak van de logarithme met $\log 1 = 0$ en zo dat $\log z$ analytisch is op de hieronder geschetste contour. Zij $f(z) = \frac{z^2 \log z}{z^4 + 1}$. Toon aan dat $\oint f(z) dz = \frac{\pi^2}{8}(\sqrt{2} + i2\sqrt{2})$.
- (b) Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{x^4 + 1} dx.$$



5. **alléén W.**

De krommen γ_1 en γ_2 zijn gegeven door:

$$\gamma_1(t) = e^{2\pi it} \left(1 + \frac{1}{2}e^{8\pi it}\right),$$

respectievelijk

$$\gamma_2(t) = e^{2\pi it},$$

beide voor $0 \leq t \leq 1$. Zij verder $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Toon aan: $\gamma_1 \sim_G \gamma_2$.

6. **alléén N.**

Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

en bereken vervolgens de waarde ervan.

Normering:

1: 8; 2 a: 1; 3 a: 8; 4 a: 3; 5: 6; 6: 6
b: 4 b: 3 b: 6
c: 6

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{5}$.