

De *wiskundestudenten* maken de opgaven: 1, 2, 3, en 4W;

De *natuurkundestudenten* maken de opgaven: 1, 2, 3, en 5N.

1. a) Zij

$$T(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Bepaal en schets het beeld onder T van de strook

$$\{z \mid 0 < \Re(z) < 1\}.$$

b) Zij

$$f(z) = (z - \tan z) \sin z.$$

(i) Bepaal de orde van het nulpunt $z = 0$ van f .

(ii) Bepaal de convergentiestraal van de Taylor-ontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 0$.

(iii) Bereken de eerste coëfficiënt $\neq 0$ in deze Taylor-ontwikkeling.

2. a) Zij

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - z + 2)(z - 1)}.$$

(i) Bereken de breuksplitsing van $f(z)$.

(ii) Ontwikkel de functie $g(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ in een Laurent-reeks voor $|z| > 1$. [Hint: $\frac{d}{dz}(\frac{-1}{z-1}) = \frac{1}{(z-1)^2}$.]

(iii) Ontwikkel $f(z)$ in een Laurent-reeks op de ring $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$.

b) Zij m een natuurlijk getal, en

$$f(z) = (z + \frac{1}{z})^m.$$

Laat verder a_n de n -de coëfficiënt in de Laurent-ontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 0$ zijn.

(i) Toon aan dat

$$a_n = \frac{2^{m-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^m \cos(nt) dt.$$

Z.O.Z.

(ii) Gebruik dit om de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^8 \cos(8t) dt$$

te berekenen.

3. a) Bereken met behulp van een kringintegraal langs de eenheidscirkel de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \sin^2 t}.$$

b) Toon aan:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. alléén W.

a) De kromme γ is gegeven door:

$$\gamma(t) = 2|\cos t|e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

en G is het gebied $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Bewijs dat γ in G homotoop is met Γ_2 , de (eenmaal linksom doorlopen) cirkel met straal 2 om 0.

b) Bereken nu (met γ als boven) de lijnintegraal

$$\int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) dz.$$

5. alléén N.

Bereken (met behulp van de gamma-functie) de integraal

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt.$$

Normering:

1 a: 5; 2 a: 5; 3 a: 6; 4 a: 3; 5 : 5.
b: 5 b: 4 b: 6 b: 2

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.