

Faculteit Wiskunde en Informatica
Vrije Universiteit

Tentamen
Complexe-functietheorie

voor studenten Wiskunde, Natuurkunde.

Duur: 3 uur

22-06-1998

De *wiskundestudenten* maken de opgaven: 1, 2(a+c), 3, en 5;

De *natuurkundestudenten* maken de opgaven: 1, 2(a+b), 4, en 6.

1. Zij

$$T(z) = \frac{-2z}{z+2}.$$

(a) i. Bereken $T(2)$ en $T(T(2))$.

ii. Bewijs dat de cirkelschijf

$$|z - 1/2| < 3/2$$

door T op zichzelf wordt afgebeeld.

(b) Zij verder $f(z) = T(e^z)$.

i. Bepaal de singulariteiten van f en bewijs dat het eerste-orde polen zijn.

ii. Bereken de residuen in de polen.

iii. Bepaal de convergentiestraal van de Taylorontwikkeling van $f(z)$ rond het punt 0.

2. Zij

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}.$$

(a) Bereken de Laurentontwikkeling van $f(z)$ op de ring

$$1 < |z-1| < 2$$

h

(b) **alleen N.** Bereken de hoofdwaaarde-integraal

$$p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} (x+2)f(x)dx,$$

d.w.z. de limiet

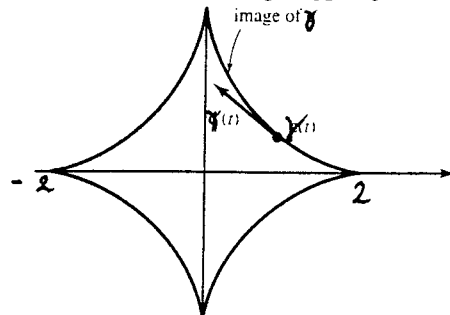
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-1-\epsilon} + \int_{-1+\epsilon}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} + \int_{+1+\epsilon}^R \right\} (x+2)f(x)dx.$$

Z.O.Z.

(c) **alleen W.** Zij γ de kromme $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$,

$$x(t) = 2 \cos^3(t), \quad y(t) = 2 \sin^3(t),$$

voor $t \in [0, 2\pi]$. (De kromme is een zg. *hypocycloide* zoals hieronder geschetst).

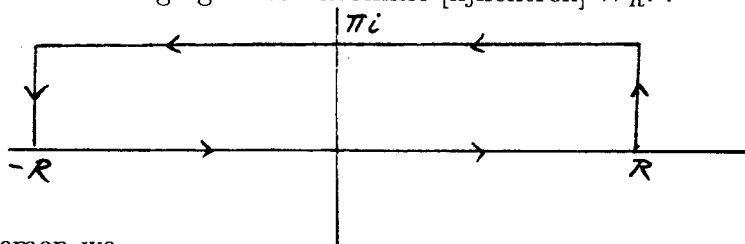


Bepaal de verandering van de waarde van $\arg f(\gamma(t))$ als t het interval $[0, 2\pi]$ doorloopt. Is er sprake van toename of afname?

3. **alleen W.** We willen de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

berekenen. We maken daartoe gebruik van een kringintegraal langs de hieronder geschetste enkelvoudige gesloten kromme [lijnentrek] W_R :



Verder noemen we

$$f(z) := \frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}.$$

(a) Bewijs dat de oneigenlijke integraal convergeert.

(b) Bereken

$$\int_{W_R} f(z) dz.$$

(c) Toon aan

$$\int_{[R, R+\pi i]} f(z) dz \longrightarrow 0 \quad [R \rightarrow +\infty].$$

(Evenzo geldt $\int_{[-R+\pi i, -R]} f(z) dz \longrightarrow 0$; dit behoeft je niet te bewijzen.)

(d) Parametriseer de integraal langs $[-R + \pi i, R + \pi i]$, en stel vast dat

$$-\int_{[-R+\pi i, R+\pi i]} f(z)dz = \int_{[-R, R]} f(x)dx - \pi^2 \int_{-R}^R \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

(e) Bereken tenslotte de gezochte integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. [Je zult daartoe nog wel even de eenvoudige integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ moeten uitrekenen.]

4. **alleen N.**

(a) Bereken

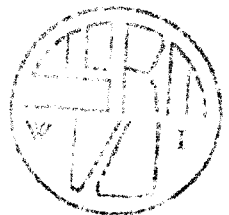
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx,$$

waarin ω een reële parameter is.

[Aanwijzing: Doe eerst $\omega > 0$ m.b.v. contour-integratie.]

(b) Bereken, via een substitutie $z = e^{it}$ de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{20 + 12 \sin t} dt.$$



5. **alleen W.** Zij γ de kromme, gedefinieerd in opgave 2(c) (de hypocycloïde).

- Bewijs (formeel) dat γ samentrekbaar is in $G := \mathbb{C} \setminus \{1+i, -1-i\}$.
- Leid hieruit de waarde van de integraal

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 2i} dz$$

af.

6. **alleen N.** Bereken $B(3, 1/2)$, de waarde van de beta-functie in $(3, 1/2)$.

Normering:

1 a:	4;	2 a:	6;	3 a:	2;	4 a:	6;	5 :	5;	6 :	5.
b:	5	b:	4	b:	2	b:	6				
		c:	4	c:	3						
				d:	3						
				e:	2						

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.