

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Complexe Functies (X_401019)
Afdeling Wiskunde	13-02-2014
Vrije Universiteit	18:30-20:30 uur

Gebruik van rekenmachine, formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan

1. a) Los op in $\mathbb{C}$: $e^z = 2i$.
b) Bepaal de hoofdwaaarde van $(-i)^i$.

2. We bekijken de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

- a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
- b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f analytisch is op $\mathbb{C}$.

3. De functie $f : \mathbb{C} \setminus \{2, 4\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$.

- a) Bepaal de reeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $2 < |z| < 4$.
[Aanwijzing: gebruik breuksplitsing.]
- b) Laat C de cirkel $|z| = 3$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

4. Gegeven is voor $z \neq 0$ de complexe functie $f(z) = \frac{1 - e^{z^2}}{z^2}$ en de contour $C : |z| = 1$, die in positieve zin wordt doorlopen.

- a) Toon aan dat $z = 0$ een ophefbare singulariteit is.
- b) Bereken $\int_C f(z) dz$.

Z.O.Z.

5. Gegeven zijn de complexe functie

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$$

en voor $R > 2$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\} \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Bepaal de singulariteiten van $f(z)$ en bereken het residu van $f(z)$ in de singulariteiten die in het bovenhalfvlak ($\operatorname{Im} z \geq 0$) liggen.
b) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Geef γ een oriëntatie en bereken

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

- d) Bereken $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : a) 3
b) 2	b) 2	b) 2	b) 1	b) 2
				c) 2
				d) 2
—	—	—	—	—
4	5	5	4	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{3} + 1$$