

Faculteit der Exacte Wetenschappen	400386 Complexe Functietheorie Deel 1
Afdeling Wiskunde	voor natuurkunde: 401019 Complexe functies
Vrije Universiteit	12-01-2011, 18.30-20.30 uur

Licht je antwoorden duidelijk toe. Totaal 11 onderdelen. Normering: elk onderdeel 1 punt. Cijfer is de totaalscore, minimaal 1, maximaal 10.

1. Laat steeds $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

- Schrijf $\cos(z)$ en $\sin(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies van x en y .
- Toon m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann aan dat $\cos(z)$ en $\sin(z)$ complex differentieerbaar zijn op $\mathbb{C}$.
- In welke $z \in \mathbb{C}$ is

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

complex differentieerbaar? Waarom? Bepaal voor die z de complexe afgeleide van $\tan z$.

- Bepaal het residu van $\tan z$ in alle singulariteiten van $\tan z$.

2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$.

De kromme C_R heeft parametrisatie $t \rightarrow Re^{it}$, waarbij $t \in [0, 2\pi]$.

- Bepaal de machtreeksontwikkeling van f in machten van z rond $z = 0$.
- Wat is de convergentiestraal van de machtreeks van $f(z)$ rond $z = 1$?
- Bepaal $\oint_{C_R} f(z) dz$ voor elke $0 < R < 1$.
- Bepaal $\oint_{C_R} f(z) dz$ voor elke $R > 1$.

3. Laat de complexe functie f gegeven zijn door

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}.$$

- Bereken de residuen van f in het bovenhalfvlak.
- De kromme γ_R heeft parametrisatie $t \rightarrow Re^{it}$, waarbij $t \in [0, \pi]$. Bepaal

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

- Bereken

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$$