

Alle studenten maken opgaven 1,2,3 (10 onderdelen) en naar keuze ook de bonusopgave 4. Normering: elk onderdeel (ook opgave 4) 1 punt. Cijfer is de totaalscore, minimaal 1, maximaal 10.

1. Laat $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven zijn door $f(z) = \cos z$.

a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.

b) Toon aan m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$.

2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$.

a) Bepaal de machtreeksontwikkeling van f in machten van z rond $z = 0$.

b) Bepaal de machtreeksontwikkeling van f in machten van $z - 1$ rond $z = 1$ tot en met orde 2. Wat is de convergentiestraal R van deze machtreeks?

c) Laat C de cirkel zijn waarop $|z| = 2$ die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

d) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van z voor z groot. Hint: substitueer $z = \frac{1}{w}$. Buiten welke cirkel $|z| = \rho$ is deze reeks convergent?

3. Laat $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 121)}$. Voor $R > 0$ zijn gegeven de krommen

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

b) Bereken de residuen van f in het bovenhalfvlak.

c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen. Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.

d) Bereken met de onderdelen a) en c)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 121)} dx$$

4. Bonusopgave: bereken voor $a > 1$

$$I_a = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} dx.$$