

voor studenten Wiskunde, Natuurkunde.

Duur: 3 uur

22-8-2005

Aantal opgaven: 6

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 7;

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.

$\Re z$ en $\Im z$ staan voor het reële en imaginaire deel van z .

1. a) Van de analytische functie f is gegeven dat $\Re f(x + iy) = x^2 y^2$. Is dit mogelijk?
Zo ja, geef een voorbeeld van zo'n functie. Zo nee, geef aan waarom niet.
b) Bewijs: als g een analytische functie is op een gebied G die alleen reële waarden aanneemt dan is g constant. Is de informatie dat G samenhangend is essentieel?

2. Zij

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

- a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
b) Ontwikkel f in een Taylorreeks om $z = 0$ en geef de convergentiestraal.
c) Geef de Laurentontwikkeling van f rond $z = 1$ die geldig is voor grote waarden van z (met definitiegebied).

3. a) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

b) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 + 8 \cos \theta}.$$

Z.O.Z.

4. Zij

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z} - 1}$$

waarin $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z}$ (hoofdwaarde).

- Bepaal en schets het beeld onder f van $S = \{z : \Im z > 0\}$.
- Zij Γ de (eenmaal linksom doorlopen) driehoekige kromme met hoekpunten i , 2 en $1 - i$. Bereken $\oint_{\Gamma} f$.

5. Beschouw de functie

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 - a^2}$$

waarin de parameter a een willekeurig complex getal is. Bereken voor elke waarde van a met $|a| \neq 1$ de integraal van f op de eenmaal linksom doorlopen eenheidscirkel $|z| = 1$.

6. alléén N. Zij

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z - 1}.$$

- Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
- Vind het residu in alle singulariteiten van f inclusief ∞ .
- Bereken $\oint_C f$ waarbij C de cirkel $|z| = 1/2$ is, eenmaal linksom doorlopen.

7. alléén W.

- Toon aan dat alle nulpunten van de functie $z^5 + z^2 + z + 1$ liggen in de ring $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

Laten f en g gehele functies zijn. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende beweringen.

- Als $f(n) = g(n)$ voor elk geheel getal n dan is $f = g$.
- Als $f(1/n) = g(1/n)$ voor elk geheel getal n dan is $f = g$.

	1 a: 3;	2 a: 2;	3 a: 4;	4 a: 4;	5 a: 7;	6 a: 3;	7 a: 3
	b: 3	b: 3	b: 4	b: 3		b: 4	b: 3
Normering:		c: 3				c: 2	c: 3

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{5}.$$