

Duur: 2 uur voor W, 3 uur voor N

30-5-2005

Aantal opgaven: 4 voor W, 6 voor N

Normering: Zie ommezijde, onderaan het blad

Beantwoordingsinstructie: Alle antwoorden duidelijk toelichten.

De *wiskunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, en 4.

De *natuurkunde* studenten maken de opgaven: 1, 2, 3, 4, 5, en 6.

$\Re(z)$ is het reële deel van z en $\Im(z)$ is het imaginaire deel.

1. (a) Ga na of er een $\alpha \in \mathbb{C}$ bestaat zodat de functie $g(x + iy) = xy + \alpha(x^2 - y^2)$ analytisch is op geheel $\mathbb{C}$.
(b) Ga na of er een analytische functie f bestaat op geheel $\mathbb{C}$ zodat $\Re(f(z)) = |z|^2$.
2. (a) Bepaal alle oplossingen van de vergelijking $e^z = 1 + i$.
(b) Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

en de verzameling

$$V = \{z : \Re(z) > 0, -\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}.$$

Bepaal en schets het beeld van V onder f .

3. (a) Bereken de lijnintegraal

$$\oint_{C_1} \bar{z} dz,$$

waarin C_1 de eenheidscirkel is om 0, eenmaal linksom doorlopen.

- (b) Evalueer ook:

$$\oint_{C_1} \frac{\cos z}{z - 2} dz,$$

- (c) Bereken de lijnintegraal

$$\oint_{C_2} \frac{\cos z}{z - 2} dz,$$

waarin C_2 de cirkel met straal 3 is om 0, eenmaal linksom doorlopen.

Z.O.Z.

4. Zij

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}.$$

- (a) Vind de Taylorontwikkeling van f om 0 met de convergentiestraal.
- (b) Vind de Laurentontwikkeling van f om 1 die voor grote waarden van z geldig is. Bepaal het gebied waarop deze ontwikkeling geldig is.
- (c) Bereken de integraal $\oint_{\Gamma} f$ waarin Γ de cirkel is om 0 met straal 5.

5. Zij

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^2(z - 1)},$$

waarin α een getal is met $\Im \alpha > 0$.

- (a) Bepaal de singulariteiten van f en hun aard.
- (b) Bepaal het residu van f in elk van de singulariteiten en in ∞ .
- (c) Bepaal de Cauchy Hoofdwaarde:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2(x - 1)}.$$

6. (a) Bereken met behulp van residuencalculus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

(b) Bereken met behulp van een kringintegraal op de eenheidscirkel

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{5 + 4 \cos \theta}.$$

	1 a: 4;	2 a: 4;	3 a: 3;	4 a: 4;	5 a: 3;	6 a: 4;
	b: 4	b: 5	b: 3	b: 3	b: 3	b: 5
Normering:			c: 3	c: 3	c: 3	

$$W \text{ eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4} \quad N \text{ eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{6}.$$