1. (i) De formule heeft precies dan betekenis als:
$1-2x>0$ én $x^2+x^3>0$.
Dus $x<\frac{1}{2}$ én $x\neq 0$ én $x>-1$.
Dus $D_f = (-1,\frac{1}{2})\setminus\{0\}$.

(ii) Bedenk bij dit onderdeel dat $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ voor elke negatieve $x$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-2x)}{\sqrt{x^2+x^3}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-2x)}{-x\sqrt{1+x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-2x)}{-2x} * \frac{2}{\sqrt{1+x}} = 1 * \frac{2}{1} = 2.$$

(iii) Bereken nu ook $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-2x)}{\sqrt{x^2+x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-2x)}{x\sqrt{1+x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-2x)}{-2x} * \frac{-2}{\sqrt{1+x}} = 1 * \frac{-2}{1} = -2.$$

Dus $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Dus $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat niet.
Hoe we $f(0)$ ook definiëren, nimmer zal $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
Dus niet-ophefbare discontinuïteit.

2. a) $$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x+x^2}\right)\frac{\left(x+\sqrt{x+x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x+x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x^2}{x+\sqrt{x+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}} \overset{RR}{=} \boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) $$\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^x = \left\{\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^{-\frac{2x+1}{2}}\right\}^{-\frac{2x}{2x+1}}$$
$$\to e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}} \text{ als } x\to\infty$$
want dan $\frac{2}{2x+1}\to 0$ en $-\frac{2x}{2x+1} = \frac{-2}{2+\frac{1}{x}} \to -1$

3. a) $g$ is diff., dus zeker continu.
$g(-1) = -1-1+\cos(-1) = -2+\cos(-1) < 0$
$g(0) = 0+0+\cos 0 = 1 > 0$
Dus volgens de tussenwaarde-stelling voor continue functies heeft $g$ tussen $-1$ en $0$ tenminste 1 nulpunt.
$g'(x) = 5x^4+1-\sin x > 0$ zowel voor $x=0$ als elke $x\neq 0$.
Dus $g$ is strikt stijgend, en kan dus nooit meer dan 1 nulpunt hebben.

b) $g(x) = x^5+x+1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

Het 2e graads Taylor-polynoom $P_2(x)$ van $g$ (om $x=0$) luidt dus: $P_2(x) = 1+x-\frac{1}{2}x^2$.
(Men kan $g$ ook 2x diff.ren en formule gebruiken)

4. a) $$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = -\ln|2+\cos x| + C$$
(Kan ook via subst.: $u=\cos x$)

b) Breuksplitsen: $\frac{x-4}{x^2+x-2} = \frac{x-4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$
Onder 1 noemer brengen geeft tenslotte:
$x-4 = A(x-1)+B(x+2)$ dus $A=2 \wedge B=-1$
Dus:
$$\int_2^3\frac{x-4}{x^2+x-2}\,dx = \int_2^3\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = \Big[2\ln|x+2|-\ln|x-1|\Big]_2^3$$
$$= 2\ln 5-\ln 2-2\ln 4 = \boxed{2\ln\frac{5}{4}-\ln 2}$$

4. c) Oneigenlijke integraal! Dus bekijk $(0<\alpha<1)$

$$\mathcal{I}_\alpha = \int_\alpha^1 \sqrt{x}\,\ln x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=\!=} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}\right]_\alpha^1 = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\alpha^{3/2}\ln\alpha + \frac{4}{9}\alpha^{3/2}$$

$\longrightarrow -\frac{4}{9} - 0 + 0$ als $\alpha \downarrow 0$ dus $\mathcal{I} = -\frac{4}{9}$

5. a) (i) $|u_n| = \frac{1}{\ln n^2} = \frac{1}{2\ln n} > \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n}$ div.

dus $\sum u_n$ niet absoluut convergent

De reeks $\sum u_n$ is alternerend en $\frac{1}{\ln n^2} \downarrow 0$ (mon.)

dus (Leibniz) de reeks convergent.

Dus $\sum u_n$ is relatief convergent.

(ii) $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$ als $n \to \infty$

Dus $\sum u_n$ is absoluut convergent.

(Kan ook m.b.v. quot. crit.)

b) (i) $\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|x|^n / n4^{n+1}} = |x| \Big/ 4\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{4}$

$\longrightarrow \frac{|x|}{4}$ als $n \to \infty$

dus (abs) conv als $|x| < 4$ en div. als $|x| > 4$

dus $\underline{R = 4}$

(ii) • $x = 4$ : $\sum \frac{(-1)^n 4^n}{n4^{n+1}} = \sum \frac{(-1)^n}{4n}$ is (relat.)

$\underline{\text{conv.}}$ volgens Leibniz

• $x = -4$ : $\sum \frac{(-1)^n(-4)^n}{n4^{n+1}} = \sum \frac{1}{4n}$ is $\underline{\text{divergent}}$

(vgl. harm. reeks)

6. (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 2$ als $x = 1$ en $y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 12 = -11$ als $x = 1$ en $y = 0$

Vgl. raakvlak : $z = -1 + 2(x-1) - 11(y-0)$

of wel $\underline{z = 2x - 11y - 3}$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 0$ geeft $x = 0 \vee y = -1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 12 = 0$ geeft bij $x = 0$ : $y^2 = 4$

en bij $y = -1$ : $x^2 = 9$

Dus 4 stat. pt$\underline{^n}$ :

$(0, \pm 2)$ en $(\pm 3, -1)$

(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2y$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$

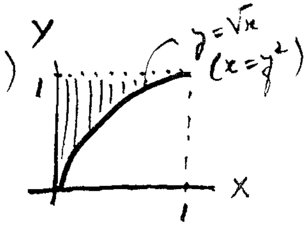
dus $\Delta = (2+2y)6y - 4x^2$

Dus $\Delta > 0$ in $(0, \pm 2)$ dus daar extr. (min/max)

$\Delta < 0$ in $(\pm 3, -1)$ dus daar zadelpt

(géén extr.)

7. a)

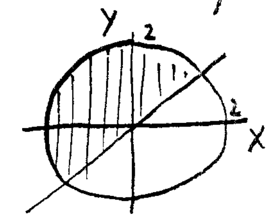



Verwisseling levert:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \frac{3}{4+y^3}\,dx\right) dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{4+y^3}\,dy$$

$$= \ln|4+y^3|\Big]_0^1 = \ln 5 - \ln 4 = \ln\frac{5}{4}$$

b)




Overgang op poolcoördinaten geeft:

$$\int_{\pi/4}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^2 r\cos(r^2)\,dr\right) d\varphi = \pi \,*$$

$$* \frac{1}{2}\sin(r^2)\Big]_0^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\sin 4}}$$