

(I)

$$1. a) \int_0^{\infty} x e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2 \cdot 0^2} \rightarrow \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \text{ als } x \rightarrow \infty$$

$\left(\frac{1}{4}\right)$ is de waarde van de (convergente) oneigenlijke integraal.

b) Voor breuksplitsing uit:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\text{Dan } 2x-1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

$x=0$ en $x=1$ invullen geeft: $A=-1$ en $C=1$
coëff. van x^1 : $0=A+B$ dan $B=1$. Vervolgens:

$$\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

$$c) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{Met } u=\sqrt{x} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \int \arctan u \, du \stackrel{\text{p.i.}}{=} \int \arctan u \, du$$

$$u \arctan u \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} u \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \left[u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$2. a) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 1^2 \cdot 0 = 0 < 1$$

dan deze reeks is absoluut convergent.

$$b) \frac{1+\sqrt{n}}{n} > \frac{1}{n} \text{ en } \sum \frac{1}{n} \text{ is divergent dan deze reeks is niet absoluut convergent.}$$

De reeks is altijd in $|u_n| = \frac{1+\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ gaat monoton naar $0+0=0$ dan de reeks is wel convergent (Leibniz). Conclusie:

Dan de reeks is relatief convergent.

(II)

$$2. c) \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ als } n \rightarrow \infty \text{ dan } \frac{1}{\arctan n} \rightarrow \frac{2}{\pi} \text{ als } n \rightarrow \infty$$

$$\text{dan } \frac{(-1)^n}{\arctan n} \not\rightarrow 0 \text{ dan deze reeks divergeert.}$$

$$3. a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 5^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \text{ is een Meetkundige Reeks met reden } \frac{2}{5}. \text{ Dan convergent met som } \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$b) (i) \sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n 8^{n+1}}} = \frac{|x|}{8 \sqrt[n]{n 8}} \rightarrow \frac{|x|}{8} \text{ als } n \rightarrow \infty$$

dan (abs) convergent als $|x| < 8$ en divergent als $|x| > 8$.

Dan convergentie - straal $R=2$.

$$(ii) x=R=2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n 8^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ is divergent}$$

(want de harmonische reeks is ook divergent)

$$x=-R=-2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{n 8^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ is}$$

(relatief) convergent want voldoet aan het criterium van Leibniz voor alternerende reksen.

$$4. a) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6x - 12y = 0 \quad (x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 12x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \text{ invullen in } (x)$$

$$\text{geeft } x^2 - x - 3x = 0 \text{ dan } x=0 \vee x=4$$

dan 2 station. punten: $(0,0)$ en $(4,6)$

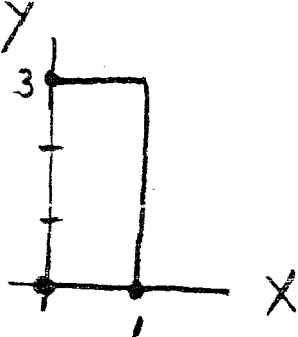
$$b) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,6) = 8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12$$

$$\text{Dan } \Delta = (12x-6) \cdot 8 - 144$$

In $(0,0)$ geldt $\Delta < 0$ dan daar ladelpunt

In $(4,6)$ geldt $\Delta > 0$ dan daar een extreme waarde en wel een minimum

4. c)



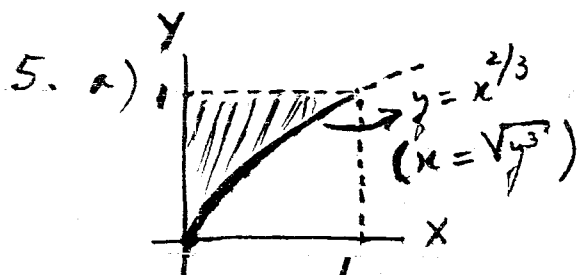
We bekijken het verloop van f op de 4 zijden van de rechthoek:

- $f(x, 0) = 2x^3 - 3x^2 + 10 = h(x)$
 $h'(x) = 6x^2 - 6x \leq 0$ op $[0, 1]$

dan f daalt op deze zijde van 10 $\rightarrow$ 9

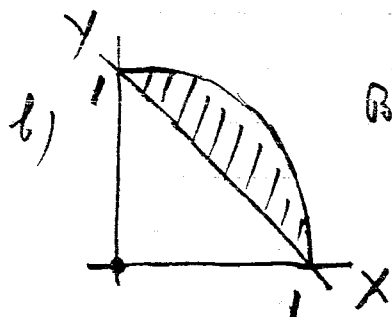
- $f(0, y) = 4y^2 + 10$ loopt op van 10 naar 46
- $f(x, 3) = 2x^3 - 3x^2 + 36 - 36x + 10 = h(x)$
 $h'(x) = 6x^2 - 6x - 36 < 0$ op $[0, 1]$ dan f daalt op deze zijde van 46 naar 9
- $f(1, y) = 2 - 3 + 4y^2 - 12y + 10 = 4y^2 - 12y + 9 = (2y - 3)^2$ neemt op deze zijde alle waarden van 0 tot 9 (2x) aan.

Dus grootste waarde 46 (in $(0, 3)$) en kleinste waarde 0 (in $(1, \frac{3}{2})$)



Verwisseling van integratievolgorde levert:

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y^3}}^1 x \cos y^4 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \cos y^4 \Big|_{\sqrt{y^3}}^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y^3 \cos y^4 dy = \frac{1}{8} \sin y^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \sin 1$$



Bedenk: de vgl. van de rechte lijn $x+y=1$ luidt in poolcoörd.: $z \cos \varphi + z \sin \varphi = 1$ of wel: $z = \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}$

Ga over op poolcoörd.:

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 z \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2})^{3/2}} dz d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{z} \Big|_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi - 1) d\varphi = \left[2 - \frac{\pi}{2} \right]$$