

4. c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x+1}} \quad \text{stel } t = e^x \quad \frac{dt}{dx} = e^x = t \quad \int \frac{dt}{t(t+1)} =$

$dx \leftrightarrow \frac{dt}{t}$

(heuplitten): $\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$

$= \left[\ln|t| - \ln|t+1| \right]_1^e = \ln \frac{e}{e+1} + \ln 2 = \boxed{\ln \frac{2e}{e+1}}$

5. a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x+2)^n$, dan deze reeks

is een Meetkundige Reeks met reden $2x+2$, en

dit convergent als $|2x+2| < 1$ of wel $|x+1| < \frac{1}{2}$

of $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$. Voor die waarden van x heeft

de reeks dan de som $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(2x+2)} = \boxed{\frac{-1}{2x+1}}$

b) (i) $|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ en $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ is

convergent (p-reeks met $p = \frac{3}{2} > 1$) dan

$\sum |u_n|$ is conv., dan $\sum u_n$ absoluut convergent

(ii) $|u_n| = \frac{1}{n \ln n}$ en $\sum |u_n|$ is divergent

(gebruik het integraal-criterium en bedenkt dat

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty$, dan divergent onv. int.)

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ is wel convergent want afwisselend en

$\frac{1}{n \ln n} \Big|_0$ (Leibniz) dan wel verp. niet absoluut convergent

(IV)

6. (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 12x = 1$ als $x=0$ en $y=1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 2$ als $x=0$ en $y=1$

Dan vgl. raakvlak: $2+1 = 1(x-0) + 2(y-1)$
of wel $2 = x + 2y - 3$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 12x = 0 \quad x=0 \vee x=-2 \quad y = \pm \sqrt{6}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow y=0 \vee x=-1$

dan 4 stat. pt's: $(-1, \pm\sqrt{6}), (0,0)$ en $(-2,0)$

(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 12 = 12(x+1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2 = 2(x+1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, dan $\Delta = 2^2(x+1)^2 - 4y^2$

dan sadelpnt in $(-1, \pm\sqrt{6})$ en exl. in

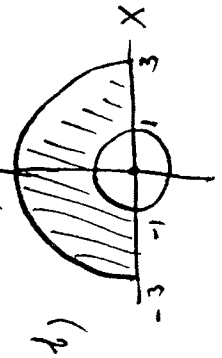
$(0,0)$ en in $(-2,0)$ en wel min. resp. max.

7. a) $y=x$



Verwisseling integratievolgorde geeft

$\int_0^1 \left(\int_y^1 \sqrt{1-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = -\frac{1}{3} (1-y^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$



Overgang op poolcoördinaten

geeft:

$\int_0^{\pi} \left(\int_{-1}^1 r \cdot r dr \right) d\varphi =$

$= \pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{-1}^1 = \pi \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{26\pi}{3}}$

1. (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1.$

(Zou ook prima met L'Hôpital kunnen)

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2+e^x} \cdot e^x}{\frac{1}{3} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6+3e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{6}{e^x} + 3} = \frac{1}{3}$

(Kan ook m.b.v. Inzetsstelling)

a) $f_{18}(x) = 18 \ln x - x^2$ is continu (zelfs diff.) op $(0, \infty)$.

$f'_{18}(x) = \frac{18}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

tekenverloop f'_{18} : $\leftarrow \begin{matrix} + & + & + & + & + \\ 0 & & & & \end{matrix} \begin{matrix} - & - & - & - & - \\ 3 & & & & \end{matrix} \rightarrow$

$f_{18}(1) = -1 < 0$ $f_{18}(3) = 18 \ln 3 - 9 > 0$

$f_{18}(18) = 18 \ln 18 - 18^2 < 0$

Op grond van de tussenw. Stelling is er dan zeker een nulpunt op $(0, 3)$ en ook een nulpunt op $(3, \infty)$

Daar f_{18} strikt stijgend op $(0, 3]$ en strikt dalend op $[3, \infty)$ zijn er niet meer nulpunten.

b) Laat dat $f_c(x) = f'_{18}(x) = 0$ (m.a.v. dat de functiewaarde in het max. precies 0 is)

Vervolg 2.1):

$\ln x - x^2 = 0 \wedge \frac{c}{x} - 2x = 0$

dan $x = \sqrt{\frac{c}{2}}$ en dan $\ln \sqrt{\frac{c}{2}} - \frac{c}{2} = 0$

of wel ($c > 0$): $\ln \frac{c}{2} = 1$ dan $\boxed{c = 2e}$.

3. $f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$ dan $\frac{f'(0)}{f(0)} = -2$

$f'(x) = 2xe^{-2x} - 2(x^2 - 2)e^{-2x}$

$= e^{-2x}(-2x^2 + 2x + 4)$

$f''(x) = (-4x + 2)e^{-2x} - 2(-2x^2 + 2x + 4)e^{-2x}$

Dan 2^o gr. Taylorpolynoom

$P_2(x) = -2 + 4x - 3x^2$

(Zou ook kunnen via een beginstuk van de machtheven ontv. van e^{-2x} rond $x=0$)

4. a) $\int_0^t \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \arctan(2x) \Big|_0^t = \frac{1}{2} \arctan(2t) - 0$

$\rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}}$ als $t \rightarrow \infty$. Dan $\int_0^\infty \frac{dx}{1+4x^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

b) $\int_1^e \ln^2 x \, dx \stackrel{\text{P.i.}}{=} x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx$

$= e - \int 2 \ln x \, dx = e - [2x \ln x - 2x]_1^e =$

$= e - 2e + 2e - 2 = \boxed{e - 2}$.