

1. a) (i) Vanwege de absolute-strepen bekijken we linker- en rechterlimiet apart:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} \stackrel{\text{R.R.}}{=} \frac{1}{2}, \text{ terwijl}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x+1} \stackrel{\text{R.R.}}{=} -\frac{1}{2}; \text{ dus}$$

de gevraagde limiet bestaat niet (verschillende rechter- en linkerlimiet).

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{1 - \sqrt{1+\sin x}}{x \cos x} &= \frac{1 - \sqrt{1+\sin x}}{x \cos x} * \frac{1 + \sqrt{1+\sin x}}{1 + \sqrt{1+\sin x}} = \\ &= -\frac{\sin x}{x \cos x} * \frac{1}{1 + \sqrt{1+\sin x}} \stackrel{\text{R.R.}}{\rightarrow} -\frac{\sin x}{x} * \frac{1}{\cos x} * \frac{1}{1 + \sqrt{1+\sin x}} \stackrel{\text{R.R.}}{\rightarrow} \\ &\rightarrow -1 * \frac{1}{1} * \frac{1}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2} \text{ als } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- b) (i) Voor continuïteit in 0 moet gelden: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$.
Welnu:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos x}{x} * \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin x}{x} * \sin x * \frac{1}{1 + \cos x} \stackrel{\text{R.R.}}{\rightarrow} 1 * 0 * \frac{1}{1+1} = 0 \text{ als } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Men moet c dus gelijk aan 0 kiezen.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &\stackrel{c=0}{=} \frac{f(x)}{x} = (\text{zie bij (i)}) = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 * \frac{1}{1 + \cos x} \stackrel{\text{R.R.}}{\rightarrow} 1^2 * \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ als } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dus met $c=0$ is f ook diff. baar in $x=0$ met $\underline{f'(0) = \frac{1}{2}}$.

2. Impliciet differentieren levert:

$$2x - 3y - 3x \frac{dy}{dx} + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Vul in: } x=2, y=1$$

$$4 - 3 - 6 \frac{dy}{dx} + 4 \frac{dy}{dx} = 0; \text{ dus in } (2,1): \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

en dus leidt de vgl. v/d raaklijn:

$$(y-1) = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{of wel} \quad \underline{\underline{2y = x.}}$$

3. a) Zij f continu op $[a, b]$ en s een reëel getal tussen $f(a)$ en $f(b)$. Dan bestaat een $c \in (a, b) : f(c) = s$.

b) Zij f diff. baar op (a, b) en continu op $[a, b]$. Dan bestaat een $c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4. Voer in de functie $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}$ voor $x \geq 0$.
 Dan f continu op $[0, \rightarrow)$ en diff. baar op $(0, \rightarrow)$
 met $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}} - 1) > 0$ voor elke $x > 0$. Dus f is stijgend op $[0, \rightarrow)$ en daar $f(0) = 0$ geldt $f(x) > 0$ voor elke $x > 0$.

Dus: $e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x} > 0$ voor elke $x > 0$.

Dus: $e^{\sqrt{x}} > 1 + \sqrt{x}$ voor elke $x > 0$.

$$5. a) (i) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx \quad \begin{array}{l} \text{Stel } t = 1+e^x \\ \frac{dt}{dx} = e^x \end{array} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - 2t^{1/2} + C = \frac{2}{3} (1+e^x)^{3/2} - 2\sqrt{1+e^x} + C$$

$$(ii) \int_0^1 \frac{x + \arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \arctan^2 x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi^2}{32}$$

b) Voor $x > 0$ geldt (stel $x^2 = u$) als $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = e^{\sqrt{u}} \cos(\pi \sqrt{u}) * 2x =$$

$$e^x \cos(\pi x) * 2x \quad \underline{x=2} \quad e^2 \cos(2\pi) * 4 =$$

$$= e^2 * 1 * 4 = \underline{4e^2}$$

6. Scheiding van variabelen geeft:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (3x^2 - 1) dx \quad \text{of wel}$$

$$-\frac{1}{y} = x^3 - x + C. \quad \text{Invullen } y(0) = 1 \text{ geeft:}$$

$$-\frac{1}{1} = 0 - 0 + C \quad \text{dus} \quad C = -1$$

de gewenste oplossing:

$$-\frac{1}{y} = x^3 - x - 1 \quad \text{of wel:}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1+x-x^3}}}$$