

1. a) (i) $\frac{\tan \sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(3\sqrt{x}+2)\cos \sqrt{x}} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2}$
 $= \boxed{\frac{1}{2}}$ als $x \rightarrow 0^+$ (want dan ook $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$)

(ii) $\frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2x} = \frac{2 - \sqrt{x+4}}{2x\sqrt{x+4}} =$
 $= \frac{-x}{2x\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})} \rightarrow \frac{-1}{2 \cdot 2(2+2)} = \boxed{-\frac{1}{16}}$
als $x \rightarrow 0$

b) Uit $y + y^3 = \sin x$ volgt $y(0)(1 + y^2(0)) = 0$
dan $y(0) = 0$.

Impliciet differentieren geeft:

$y' + 3y^2 \cdot y' = \cos x$ Nu $x=0$ invullen

geeft: $y'(0)(1 + 3y^2(0)) = \cos 0 = 1$

Dus: $\underline{y'(0) = 1}$

2. a) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Tekenverloop f' : $\frac{- - -}{0} \frac{+ + +}{2} \frac{- - -}{-}$

$f(0) = -1$ $f(2) = 4e^{-2} - 1 = \left(\frac{2}{e}\right)^2 - 1 < 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 - 1 = -1$

Hieruit volgt dat we in $x=0$ een globaal minimum en in $x=2$ een lokaal maximum hebben.

2. b) (i) Voor elke $x \geq 0$ geldt: $f(x) \leq f(2) < 0$
(zie tekenverloop f' bij a.)

(ii) f is continu; $f(0) < 0$; $f(-1) = e^{-1} > 0$
dan f wordt tussen -1 en 0 een keer
0. Daar f op $(-\infty, 0]$ strikt dalend
is, wordt f niet meer dan 1 keer 0.

c) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ dan

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots$ dan

$x^2(e^{-x}) - 1 = -1 + x^2 - x^3 + \dots$

Dus $-1 + x^2 - x^3$ is gevraagde Taylorpolynoom

3. (i)
$$\begin{array}{r} x^2+x \over x^3+x^2 \quad x+1 \over x-1 \\ \underline{-x^2+x} \\ -x^2-x \\ \underline{-2x+1} \end{array}$$

Dus $\frac{x^3+x+1}{x^2+x} = x-1 + \frac{2x+1}{x^2+x}$ en dan

$$\int_1^2 \frac{x^3+x+1}{x^2+x} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2+x| \right]_1^2 =$$

$$= 2 - 2 + \ln 6 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \boxed{\frac{1}{2} + \ln 3}$$

(ii)
$$\int_1^\infty \frac{1}{y^2} e^{-\frac{2}{y}} dy = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^\alpha \frac{1}{y^2} e^{-\frac{2}{y}} dy = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{y}} \right|_1^\alpha =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{1}{2} e^{-2} \right) = \boxed{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)}$$

4. (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 = y$ $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ stat. pt.} \\ \text{nl.} \end{array}$
 $(0,0) \text{ en } (1,1)$

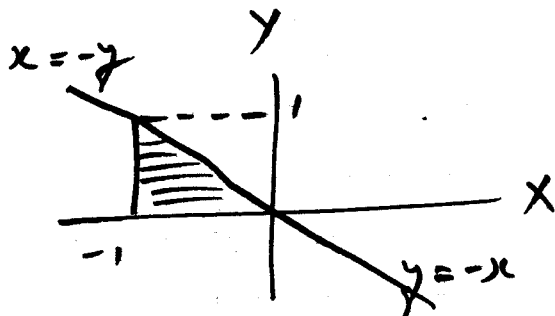
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$
 $\Delta = 72x - 36 = \begin{cases} > 0 \text{ in } (1,1) \\ < 0 \text{ in } (0,0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{lokaal} \\ \text{minimum} \\ \text{sadelpt.} \end{array}$

5. (a) (i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1/e}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ dus reeks is
absoluut convergent

(ii) $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \geq \frac{1}{n-1}$ en $\sum \frac{1}{n-1}$ is
 divergent dus $\sum |a_n|$ is divergent
 dus $\sum a_n$ is niet absol. conv.
 $\sum a_n$ is alternerend en $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \downarrow 0$ (monoton!) dus (Leibniz)
 $\sum a_n$ is convergent ; dus relatief conv.

b) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{2n+2}}{2+3^{n+1}} \cdot \frac{2+3^n}{x^{2n}} \right| = x^2 \cdot \frac{2+3^n}{2+3^{n+1}}$
 $= x^2 \cdot \frac{2/3^n + 1}{2/3^n + 3} \rightarrow \frac{1}{3} x^2$ als $n \rightarrow \infty$
 Dus conv. als $x^2 < 3$ en divergent
 als $x^2 > 3$ dus conv. straal $R = \sqrt{3}$.

6. a)



Verwisseling van integratie-volgorde geeft:

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{-x} 3x e^{x^3} dy \right) dx = \int_{-1}^0 -3x^2 e^{x^3} dx =$$

$$= -e^{x^3} \Big|_{-1}^0 = -1 + e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e} - 1}.$$

b) $\oint_a$ (interieur) over op bolcoördinaten:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta =$$

$$= 2\pi * \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi * \int_0^2 \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\pi * 1 * 4 = \boxed{8\pi}$$