Uitwerking eerste deeltentamen Calculus 26/10/2000

1. a) $\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{xe^{x^2}} = \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{xe^{x^2}} * \dfrac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} =$

$= \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}e^{x^2}} * \dfrac{1}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} \xrightarrow{R.R.} \dfrac{2}{e^0(\sqrt{4}+\sqrt{4})} = \boxed{\frac{1}{2}}$ als $x \to 0$

b) $-|\sin x| \le \sin x . \sin\frac{1}{x} \le +|\sin x|$

$x \to 0$ Insl. {stelling} $x \to 0$

0

Dus (op grond v/d Insluit. St) is de gevraagde limiet: $\boxed{0}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{2x-\pi}{\tan(2x)} \overset{l'Hop}{=} \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{2}{2/\cos^2(2x)} = \dfrac{2}{2.(-1)^2} = \boxed{1}$

2. (i) $f(x) = e^x \cos x$ dus $f(0) = 1.1 = 1$

$f'(x) = e^x\cos x - e^x \sin x$ dus: $f'(0) = 1.1 - 0 = 1$

Dus $L(x) = f(a) + f'(a).(x-a) = 1 + 1.(x-0) = \underline{1+x}$

(ii) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x$ op $[-\pi/2, +\pi/2] \Leftrightarrow$

$x = \pi/4$.

Tekenverloop f':

$$\begin{array}{ccccccc} & + + + + + & & + + & & - - - & \\ \hline -\pi/2 & & 0 & & \pi/4 & & \pi/2 \end{array}$$

Dus f heeft een absoluut max in $\pi/4$ en in de beide randpunten randminima.

(iii) $f''(x) = e^x\cos x - e^x\sin x - e^x \sin x - e^x\cos x =$

$= -2e^x \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

f'' heeft tekenwisseling in 0; dus daar een $\underline{\text{buigpt}}$

3. Zij $f(x) = e^x + x + 1$ dan $f'(x) = e^x + 1 \ge 1$

dus f is ~~stijg~~ $\underline{\text{stijgend}}$. Verder geldt: $f(0) = 2 > 0$

en $f(-2) = e^{-2} - 2 + 1 < 0$ want $e^{-2} < 1$

Daar f continu (zelfs diff. baar) heeft f op grond v/d tussenwaardestelling tussen -2 en 0 een nulpunt. Omdat f stijgend is, is dit ook het enige nulpunt en dat nulpunt is dus negatief.

4. Impliciet differentiëren levert:

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$x = 3$ en $y = -2$ invullen geeft:

$$6 - 2 + 3\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{dus} \quad \frac{dy}{dx} = 4 \text{ in } (3,-2)$$

Vgl. raaklijn luidt dus:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{of wel} \quad \underline{y + 2 = 4(x-3)}.$$

5. a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x + 2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx$ $\quad$ Stel $t = 1+\sqrt{x}$, dan $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, dus $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ $\quad \displaystyle\int_2^3 \frac{t^2+2}{t^2}\,dt$

$$= \int_2^3 \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)dt = \left[t - \frac{2}{t}\right]_2^3 = 3 - \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{2} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ $\quad$ Stel $u = \sin x$, dan $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, dus $du = \cos x\,dx$ $\quad \displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} =$

$$\arctan(u) + C = \underline{\arctan(\sin x) + C}$$

6. $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}$ is van gescheide variabelen. Dus

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \text{of wel} \quad 2\sqrt{y} = \ln|x| + C = \ln x + C$$

$y(1) = 1$ invullen geeft: $\quad 2 = 0 + C$ dus $C = 2$

Oplossing: $2\sqrt{y} = \ln x + 2$ dus $\underline{y = \left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)^2}$