Uitwerking 1e Deeltentamen (D1) Calculus

21 - 10 - 1999 W/N/Ectr/BWI

---

1. a) $x - \sqrt{x^2-x} = (x - \sqrt{x^2-x}) * \dfrac{x+\sqrt{x^2-x}}{x+\sqrt{x^2-x}} =$

$$= \frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}} = \frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \xrightarrow{R.R.} \boxed{\frac{1}{2}}$$

als $x \to \infty$.

b) $\dfrac{1-\cos(3x)}{2x^2} = \dfrac{1-\cos(3x)}{2x^2} * \dfrac{1+\cos(3x)}{1+\cos(3x)} =$

$$= \frac{1-\cos^2(3x)}{2x^2(1+\cos(3x))} = \frac{\sin^2(3x)}{2x^2} * \frac{1}{1+\cos(3x)} =$$

$$= \frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2} * \frac{9}{2} * \frac{1}{1+\cos(3x)} \xrightarrow{R.R.} 1^2 * \frac{9}{2} * \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

als $x \to 0$
(want dan ook $3x \to 0$)

2. a) (i) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin(\sqrt{x})}} * \cos(\sqrt{x}) * \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

(ii) $\dfrac{\sqrt{x}\,(e^{\sin x}\cdot\cos x) - (e^{\sin x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x}$.

b) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0} = \dfrac{2h + h^2\cos\frac{1}{h^2}}{h} = 2 + h\cos\frac{1}{h^2}$

$\to 2$ als $h \to 0$; want $-|h| \le h\cos\frac{1}{h^2} \le +|h|$
en gebruik de Insluitingsstelling.

3. De raaklijn door het punt $(a, h(a))$ van de grafiek van h heeft vergelijking:

$$y - \left(a+\frac{1}{a}\right) = h'(a)\,(x-a) = \left(1-\frac{1}{a^2}\right)(x-a).$$

(II

Invullen van het punt (1,1) levert:

$$1 - a - \frac{1}{a} = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)(1-a) = 1 - \frac{1}{a^2} - a + \frac{1}{a}$$

of wel: $\frac{1}{a^2} = \frac{2}{a}$, of wel $a = \frac{1}{2}$

Invullen van $a = \frac{1}{2}$ in de vgl. van de raaklijn geeft:

$$y - \frac{5}{2} = (1-4)\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ of wel: } \underline{y = -3x + 4.}$$

4. Bekijk de (<u>continue</u>) functie $f(x) = x^5 + x - 5$

Daar $f(0) = -5 < 0$ en $f(2) = 29 > 0$ heeft f op grond van de tussenwaarde st. voor <u>cont.</u> functies <u>tenminste</u> 1 nulpunt tussen 0 en 2.

Daar $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1 > 0$ is f een strikt stijgende functie en heeft dus <u>precies</u> 1 nulpunt op $\mathbb{R}$!

5. a)(i) $$\int \sqrt{x}\cos(x\sqrt{x})\,dx \underset{du = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx}{\overset{\text{Stel } u = x^{3/2}}{=\!=\!=}} \frac{2}{3}\int \cos u \, du =$$

$$= \frac{2}{3}\sin u + C = \frac{2}{3}\sin(x\sqrt{x}) + C.$$

a)(ii) $$\int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln t}}\,dt \underset{du = \frac{1}{t}dt}{\overset{\text{Stel } \ln t = u}{=\!=\!=}} \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= 2\sqrt{u}\Big]_1^2 = \underline{2\sqrt{2} - 1}$$

b) $$y = f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\,dt \overset{u = x^2}{=\!=} \int_0^u e^{\sqrt{t}}\,dt.$$

Dan $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = e^{\sqrt{u}} * 2x \underset{\underline{x>0}}{=} \underline{e * 2x}$$