

Uitwerking Tentamen Calculus II 20/8/1999

① a) $\left| \left(\frac{2i}{i+\sqrt{3}} \right)^7 \right| = \frac{|2i|^7}{|i+\sqrt{3}|^7} = \frac{2^7}{2^7} = 1$

$$\arg \left(\frac{2i}{i+\sqrt{3}} \right)^7 = 7 \arg(2i) - 7 \arg(i+\sqrt{3}) \pmod{2\pi} =$$

$$= 7 \cdot \frac{\pi}{2} - 7 \cdot \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} = \frac{1}{3} \pi$$

Dus: $a+bi = 1 \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b) $|z|=2$ impliceert $z\bar{z}=4$. Verder geldt algemeen dat $z+\bar{z} \in \mathbb{R}$ en
 Dus: $w = \frac{z+2i}{z-2i} \cdot \frac{\bar{z}+2i}{\bar{z}+2i} = \frac{z\bar{z}+2i(z+\bar{z})-4}{z\bar{z}+2i(z-\bar{z})+4} = \frac{2i(z+\bar{z})}{8+2i(z-\bar{z})} \in \mathbb{R}$

De teller is zuiver imaginair en de noemer is reeel. Dus w is zuiver imaginair.
 [Je kunt ook $z=x+iy$ invullen en gebruiken dat $x^2+y^2=4$].

② (c) Basis: $n=1$: $a_2 = 2 + \ln(a_1) = 2 + 0 = 2 > 1 = a_1$, dus juist.
 Inductie: Neem aan dat $a_{m+1} \geq a_m$ voor een willekeurige $m \in \mathbb{N}$. We tonen aan dat de bewering ook juist is voor $m+1$, dus $a_{m+2} \geq a_{m+1}$.

Welnu $a_{m+2} = 2 + \ln(a_{m+1}) \geq 2 + \ln(a_m) = a_{m+1}$; hierbij maakten we gebruik van de monotone v.d. functie $\ln$. De bewering is dus ook juist voor $m+1$ en met het principe van volgend dus $\forall n \in \mathbb{N}$.

(cc) Neem aan $a_n \leq e^2 \forall n \in \mathbb{N}$. Te bewijzen met v.i. Basis: $a_1 = 1 \leq e^2$ dus juist. Inductie: neem aan $a_m \leq e^2$ voor een willekeurige $m \in \mathbb{N}$. Toon nu aan dat dan $a_{m+1} \leq e^2$. Welnu: $a_{m+1} = 2 + \ln(a_m) \leq 2 + \ln e^2 = 2 + 2 = 4 \leq e^2$. Dus aangebond. Met het principe van volledige inductie volgt nu dat de bewering waar is $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ccc) De rij is stijgend en naar boven begrensd, dus volgt uit de monotone convergentstelling dat de limiet bestaat.

③ (i) Stel $w = z^3$ Dan $R_w = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}}} = 1/\sqrt[4]{2} = 2$. Dus $R_z = \sqrt[3]{2}$

(cc) $R = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(n+1)!}{(2n+2)!n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$

$= 1 =$

④ a) Beschouw $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2xyz + 3yz^2$. De Kromme is Red
niveau-oppervlak $f(x,y,z) = 6$. Het raakvlak is dus $\nabla f \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$;
 $f_x = 2x + 2yz \big|_{(-1,-1,-1)} = -4$ $f_y = 2xz + 3z^2 \big|_{(-1,-1,-1)} = 5$
 $f_z = 2xy + 6yz \big|_{(-1,-1,-1)} = -8$. Dus: $-4(x+1) + 5(y-1) - 8(z+1) = 0$
ofwel $-4x + 5y - 8z = 17$

b) $\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \varphi$ $\times R \cos \varphi$

$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot -R \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot R \cos \varphi$ $\times \sin \varphi$

$R \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial R} - \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} = (R \cos^2 \varphi + R \sin^2 \varphi) \frac{\partial z}{\partial x} = R \frac{\partial z}{\partial x} \quad (*)$

Vermenigvuldig (*) met $\cos \varphi$: $x \frac{\partial z}{\partial x} = R \cos^2 \varphi \frac{\partial z}{\partial R} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

⑤ (i) $0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow 2xy = 0 \rightarrow x=0 \vee y=0$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} S_1 = (0, \frac{1}{3}\sqrt{3}) \\ S_2 = (0, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) \\ S_3 = (1, 0) \quad S_4 = (-1, 0) \end{array} \right.$
 $0 = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ $y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $x = \pm 1$

(ii) $D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2y \cdot 6y - (2x)^2 = 12y^2 - 4x^2$.

Dus $D(1,0) = D(-1,0) = -4 < 0$. Geen extremen in S_3 en S_4 .

$D(0, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = D(0, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 4 > 0$. Er bevinden zich dus
extremen in S_1 en S_2 en wel:

een minimum in S_1 , want $f_{xx}(S_1) = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0$

een maximum in S_2 , want $f_{xx}(S_2) = -\frac{2}{3}\sqrt{3} < 0$.