Uitwerking 3e toets Calculus II 28/5/99 (I

1. (i) $\limsup u_n = \liminf u_n = 1$;

$\limsup v_n = 2$, $\liminf v_n = 0$.

(ii) de rij $(u_n)_n$ convergeert (met limiet 1) en is dus een Cauchy-rij ;

de rij $(v_n)_n$ convergeert niet ($\liminf \neq \limsup$) en is dus géén Cauchy-rij.

2. a) $f(x) > 0$ voor elke $x > 0$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 * \frac{\pi}{2} = 0$ (trouwens óók $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$),

dus $\inf W_f = 0$, maar W_f heeft geen minimum.

(dat zou dan nl. 0 moeten zijn)

b) $f(1) = e^{-1} \arctan 1 = \frac{\pi}{4e} > \frac{1}{4}$

Daar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ zijn er $A > 1$

en $0 < \delta < 1$ zó dat $f(x) < \frac{1}{4}$ voor elke $x > A$

en elke $x < \delta$.

Op $[\delta, A]$ heeft de cont. f een maximum

dat $> 1/4$ is. (want $1 \in [\delta, A]$.)

Dat is dan ook het maximum van f

op heel $(0,\infty)$.

(II)

3. (i) Zij $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ $I_\alpha = \int_\alpha^{1/2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big]_\alpha^{1/2} =$

$= \ln|\ln \frac{1}{2}| - \ln|\ln\alpha| = \ln\ln 2 - \ln|\ln\alpha|$

$\lim_{\alpha \downarrow 0} I_\alpha = \lim_{\alpha\downarrow 0} (\ln\ln 2 - \ln|\ln\alpha|) = -\infty$;

dus integraal divergeert.

(ii) $0 \le \frac{\sqrt{x} - \sin x}{x^2} \le \frac{2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{2}{x^{3/2}}$ en

$\int_1^\infty \frac{2\,dx}{x^{3/2}}$ convergeert ; dus (majorantie)

de gegeven integraal convergeert óók.

4. (i) – als $x \in [0,1)$ dan $x^n \to 0$ en dus $x^n(1-x) \to 0$ als $n \to \infty$

als $x = 1$ dan $x^n(1-x) = 0 \to 0$ als $n \to \infty$

De rij $(f_n)_n$ heeft dus een puntsgewijze limiet F die overal 0 is.

– f_n is max. in $\frac{n}{n+1}$ met $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$

$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n * \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{e} * 0 = 0$ als $n \to \infty$

Dus ook $\sup\{|f_n(x) - F(x)| \mid x \in [0,1]\} \to 0$ $(n \to \infty)$

dus $(f_n)_n$ convergeert uniform op $[0,1]$.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \frac{x}{1-x}(1-x) = x$ als $x \in [0,1)$ (Meetk. Reeks)

en $\sum_{n=1}^\infty f_n(1) = 0$; dus de reeks heeft géén continue som op $[0,1]$ en elke $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ wél continu ; dus géén uniforme convergentie.