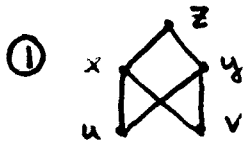


Uitwerking Toets 2 van Calculus II ; 26 april 1999



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{1}{u} \quad \text{maal } u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 1 \quad \text{maal } 1$$

$$u \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = \left(u - \frac{1}{v}\right) \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \text{ dus } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{uv \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v}}{uv - 1}$$

② a) Impliciet differentieren naar x levert:

$$2xe^y + x^2 e^y \cdot \frac{dy}{dx} + e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2ye^{2x} = 0$$

$$\text{dus } \frac{dy}{dx} = - \frac{2xe^y + 2ye^{2x}}{x^2 e^y + e^{2x}}$$

b) Merk op dat (0,3) op de kromme ligt. Verder geldt $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,3)} = - \frac{0+6}{0+1} = -6$

Dus wordt de raaklijn gegeven door $y = -6x + 3$

③ a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2xy - y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2y = 0$, dus $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Substitueer dit in de 1^{ste} vgl.

Dan volgt: $3x^2 - 2x\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = 0$

dus: $3x^2 - x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

dus: $-x\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$, met opl: $x=0 \vee x=1 \vee x=\frac{1}{2}$

Dus $S_1 = (0,0)$ $S_2 = (1,1)$ $S_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x - 1$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$DC(x,y) = 2(6x - 2y) - (-2x - 1)^2 = -4x^2 + 8x - 4y - 1$.

$DC(S_1) = DC(S_2) = -1 < 0$, dus geen extremen in S_1 en S_2
(dit kon ook via een tekenschema worden aangetoond)

$DC(S_3) = \frac{1}{2} > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$, dus er bevindt zich een minimum in S_3 (ter grootte $-\frac{1}{64}$).

④ a) Onderscheid $n = 4m$, $n = 4m+1$, $n = 4m+2$ en $n = 4m+3$ ($m \in \mathbb{N}$)
 $\sin \frac{4m\pi}{2} = \sin \frac{(4m+2)\pi}{2} = 0$, $\forall m$

$$\sin \frac{(4m+1)\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{en} \quad \sin \frac{(4m+3)\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \quad \forall m$$

De rij (a_n) heeft dus drie convergentiepunten, en wel e^{-1} , 1 , e

b) Bekijk de rijtjes $x_n = 2n\pi$ en $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. In beide gevallen geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.

$$\text{Voor } (x_n) \text{ geldt: } \sin^2 x_n = \sin^2 2n\pi = 0, \forall n$$

$$\text{Voor } (y_n) \text{ geldt: } \sin^2 y_n = \sin^2(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1, \forall n$$

$$\text{Dus } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sin^2 x_n} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sin^2 y_n} = e.$$

Volgens het rijtjescriterium bestaat de gevraagde limiet dus niet.

⑤ a) $a_1 = 2 > 0$. $a_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} a_n^2 \geq \frac{3}{4} > 0$, $\forall n$. Dus de rij is naar beneden begrensd door 0 .

b) Basis: $a_2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + 3) = \frac{7}{4} < 2 = a_1$.

Inductie: Neem aan dat voor zekere $m \geq 1$ geldt $a_{m+1} \leq a_m$. We tonen aan dat dan $a_{m+2} \leq a_{m+1}$. [N.B. $0 \leq a_{m+1} \leq a_m \Rightarrow a_{m+1}^2 \leq a_m^2$]

$$a_{m+2} = \frac{1}{4}(a_{m+1}^2 + 3) \leq \frac{1}{4}(a_m^2 + 3) = a_{m+1}. \text{ Dus bewezen } \forall n \geq 1.$$

c) Volgens monotone convergentstelling bestaat de limiet, zeg L . Dan:
 $L = \frac{1}{4}(L^2 + 3)$, dus $L = 1$ of $L = 3$. Deze laatste L is vanwege $a_1 = 2$ en dalend zijn vd rij niet mogelijk, dus $L = 1$.

⑥ (c) $\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n n}{e^n} \right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$, dus absolute convergentie

(cc) Niet absoluut convergent, want $\frac{1}{(\ln n)^2} > \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{n}$ en $\sum \frac{1}{n}$ divergent
 Maar: Leibniz

$\triangle$ Reeks alternierend $\triangle$ $\triangle$ $\triangle$ $|a_n|$ dalend naar 0 , dus convergent

Conclusie: Relatief convergent

= II =