

1. (i) basin: voor $n=1$ geldt:

$$\sum_{k=0}^1 \frac{5(k+4)!}{k!} = 5 \cdot 4! + 5 \cdot 5! = 5! + 5 \cdot 5! = 6 \cdot 5! = 6! = \frac{6!}{1!}$$

duur voor $n=1$ is de bewering juist.

(ii) Neem aan dat de bewering juist is voor tekeure $m \in \mathbb{N}$.

Dan geldt voor $m+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{5(k+4)!}{k!} &= \sum_{k=0}^m \frac{5(k+4)!}{k!} + \frac{5(m+5)!}{(m+1)!} \stackrel{!}{=} (\text{ind. aann.}) \\ &= \frac{(m+5)!}{m!} + \frac{5(m+5)!}{(m+1)!} = \frac{(m+1)(m+5)!}{(m+1)!} + \frac{5(m+5)!}{(m+1)!} = \\ &= \frac{(m+6)(m+5)!}{(m+1)!} = \frac{(m+6)!}{(m+1)!} \end{aligned}$$

; duur voor $m+1$ klopt de bewering dan ook.

2. a) (i) $\frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) \cos x}{\sin x \cos x^2} = \frac{x}{\sin x} * \frac{1}{\cos x^2} * x \sin(\frac{1}{x}) \cos x$

$\rightarrow 1 * \frac{1}{1} * 0 = 0$ als $x \rightarrow 0$, want $\sin(\frac{1}{x}) \cos x$ beperkt is en $x \sin(\frac{1}{x}) \cos x \rightarrow 0$

(ii) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \ln(x+4) = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^{\ln(x+4)} \xrightarrow{\ln 4} e^{\ln 4} = 4$

als $x \rightarrow 0$.

b) (i) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ duur

$$\cos 2x - 2 \cos x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(2 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots \right) = -1 - x^2 + \frac{7}{12}x^4 + \dots$$

Vervolg 2. b) (i):

Het 4^e orde Taylor-polynoom van f luidt dan:

$$P_4(x) = -1 - x^2 + \frac{7}{12} x^4.$$

$$(ii) \quad \frac{1 + x^2 + \cos 2x - 2 \cos x}{x^4} = \frac{\frac{7}{12} x^4 + \dots}{x^4} = \frac{7}{12} + \dots$$

$$\rightarrow \frac{7}{12} \text{ als } x \rightarrow 0.$$

3. a) Schrijf de d.v. als $y' + \frac{2}{x} y = 4x$

Vermenigvuldig de d.v. met $e^{2 \ln x} = x^2$:

$$x^2 y' + 2x y = (x^2 y)' = 4x^3 \text{ dan}$$

$$x^2 y = x^4 + C$$

$$y(1) = 2 \text{ geeft } C = 1 \text{ dan}$$

$$\text{gevraagde oplossing luidt: } \underline{y = x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

b) Karakter. vgl. luidt $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 = (\lambda + 4)^2$

$$\text{Dan } \lambda_{1,2} = -4$$

De algemene opl. v/d homog. d.v. luidt dan

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Verken als particuliere opl. v/d inhomog. d.v.

$$y = C e^{3x}. \text{ Invullen geeft } C = 1.$$

De algemene opl. v/d inhomog. d.v. is dan:

$$\underline{y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} + e^{3x}}.$$

$$4. f(x, y) = \ln \left(\frac{x^2 y^2}{\sin x \cos y} \right) = \ln \frac{x^2}{\sin x} + \ln \frac{y^2}{\cos y}.$$

Men ziet nu eenvoudig dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

$$5. a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^{k+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}} =$$

$$= \frac{1/2}{1-1/2} - \frac{1/9}{1-1/3} = 1 - 1/6 = \underline{5/6}.$$

$$b) (i) \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

als $n \rightarrow \infty$ dan reeks is convergent.

(ii) $(1 + \frac{1}{n})^{-n} \rightarrow e^{-1} \neq 0$ dan reeks is divergent
(de algemene gaat immers niet naar 0)

$$c) \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n-3}{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ dan } \underline{R = \frac{1}{1} = 1}$$

Voor $|x| < 1$ geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n+3}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+2} x^{n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 x^{n+3}}{n+2} =$$

$$= \frac{x^3}{1-x} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{x^3}{1-x} - 2x *$$

$$* (-\ln(1-x) - x) = \underline{\underline{\frac{x^3}{1-x} + 2x \ln(1-x) + 2x^2}}$$

6. a) Een primitive van $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ is: $\frac{-1}{\ln x}$.

Ans:

$$(i) \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_e^\alpha \frac{1}{x(\ln x)^2} dx =$$

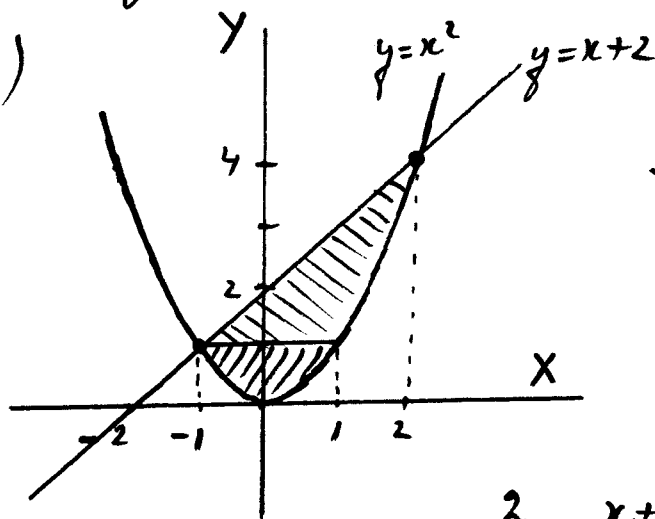
$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_e^\alpha = 1 - 0 = 1$$

$$(ii) \int_\alpha^\beta \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln \beta}$$

$\rightarrow 0 + \infty$ als $\alpha \downarrow 0$ en $\beta \uparrow 1$.

Integraal is dus niet convergent.

b) (i)



S is het gesloten gebied. Het is opgebouwd uit 2 gebieden.

$$(ii) \int_S f(x,y) dx dy = \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} e^{2x^3-3x^2-12x} dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) e^{2x^3-3x^2-12x} dx = - \left[\frac{e^{2x^3-3x^2-12x}}{6} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{6} (e^7 - e^{-20}).$$