

UITWERKING TOETS 1 CALCULUS II - 15 MAART '99

1 a) $|W| = \sqrt{2}$ $\arg W = \frac{3}{4}\pi$
 $|Z| = 2$ $\arg Z = -\frac{1}{3}\pi$

b) $\left| \left(\frac{Z}{W} \right)^8 \right| = \frac{|Z|^8}{|W|^8} = 16$
 $\arg \left(\frac{Z}{W} \right)^8 = 8 \arg Z - 8 \arg W \pmod{2\pi}$
 $= 6\pi + \frac{8}{3}\pi \pmod{2\pi} = \frac{2}{3}\pi$

$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{Z}{W} \right)^8 = 16 e^{\frac{2}{3}\pi i} = \\ = -8 + 8i\sqrt{3} \\ (a = -8; b = 8\sqrt{3}) \end{array} \right\}$

2 a) $W^2 - 2iW + 3 = 0 \Rightarrow (W - i)^2 = -4 \Rightarrow W = -i \vee 3i$

$W_1 = Z^2 = -i = e^{-\frac{1}{2}\pi i} \Rightarrow Z_{1,2} = \pm e^{-\frac{1}{4}\pi i} = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right)$

$W_2 = Z^2 = 3i = 3e^{\frac{1}{2}\pi i} \Rightarrow Z_{3,4} = \pm \sqrt{3} e^{\frac{1}{4}\pi i} = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{6}i \right)$

b) Omdat $\overline{Z^4 - 2iZ^2 + 3} = 0$ impliceert

$\overline{Z}^4 + 2i\overline{Z}^2 + 3 = 0$, volgt dat: als W een oplossing

van $Z^4 - 2iZ^2 + 3 = 0$, dan is $\overline{W}$ een oplossing

van $Z^4 + 2iZ^2 + 3 = 0$. Dus bij b) zijn de oplossingen:

$Z_{1,2} = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right)$ en $Z_{3,4} = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}i \right)$

3 a) (c) $\left| \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i n}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$. Omdat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert,
convergeert ook $\sum \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i n}}{n^2}$.

(cc) $\sum \frac{2+in}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{2}{n\sqrt{n}} + i \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Het imaginaire deel divergeert, dus divergeert de hele reeks.

b) koppel één z af en schrijf $z^2 = w$: $z = \sum_{n \geq 1} \frac{(2i)^n w^n}{n^2}$.

Omdat $\sqrt[n]{\left| \frac{(2i)^n}{n^2} \right|} \rightarrow 2$, is de convergentiestraal van de reeks in w gelijk aan $\frac{1}{2}$. Dus van z : $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 Homogeen eerst. kar. vgl: $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2 \pm 2i$, dus: $y_{\text{hom}} = c_1 e^{-2x} \cos 2x + c_2 e^{-2x} \sin 2x$

Particuliere opt: $y_{\text{part}} = A e^x \rightarrow y'_{\text{part}} = y''_{\text{part}} = A e^x$

Invullen geeft $A = 1$: $y_{\text{part}} = e^x$ en dus

$$y = c_1 e^{-2x} \cos 2x + c_2 e^{-2x} \sin 2x + e^x$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ (val dit vast in!)

$y'(0) = 3 \Rightarrow 2c_2 + 1 = 3 \Rightarrow c_2 = 1$: $y = e^{-2x} \sin 2x + e^x$

5 Merk op $(3, 2, 1)$ ligt op het oppervlak.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 - 2y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \Big|_{(3,2,1)} = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} (x^2 - 2y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4y \Big|_{(3,2,1)} = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 3 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Raankulaan:} \\ z = 1 + 3(x-3) - 4(y-2) \\ = 3x - 4y \end{array}$$

$$\underline{6} \quad f(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Parameten voorstelling raanklijn: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Dus $3x + y = 7$.