

1. (i) $f(0) = -3 < 0$ en $f(2) = 2^7 - 1 > 0$ en f is continu, dus (tussenv.-st.) f heeft een nulpunt tussen 0 en 2.

$f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$ dus f is strikt stijgend dus f heeft ook niet meer dan 1 nulpunt.
(of: als f 2 nulpt. zou hebben dan moet f' er tenminste 1 hebben (Rolle).)

(ii) $f'(-1) = 8$ en $f'(0) = 1$ dus (f' is continu.): f' neemt tussen -1 en 0 de waarde 2 aan.

(of: per de middelw. st toe op $[-1, 0]$: $\exists \xi \in (-1, 0)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-3 - (-5)}{1} = 2.)$$

(of: los $7x^6 + 1 = 2$ op; geeft bijv $x = -\sqrt[6]{\frac{1}{7}}$.)

(iii) gebruik $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ en $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ en $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$:

$$0 = \overline{0} = \overline{f(c)} = \overline{c^7 + c - 3} = \overline{c}^7 + \overline{c} - 3 = f(\overline{c}) = 0$$

dus als $f(c) = 0$ dan ook $f(\overline{c}) = 0$

2. (i) basis: $a_1 = 5 = 3^1 - (-2)^1 = 3 + 2 = 5$

$$a_2 = 5 = 3^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5$$

dus voor $n=1$ en $n=2$ klopt de bewering.

ind. stap: stel dat de bewering geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \leq m$ voor een of andere $m \geq 2$.

Dan geldt:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m + 6a_{m-1} \stackrel{!}{=} 3^m - (-2)^m + 6 \cdot 3^{m-1} - 6(-2)^{m-1} \\ &\stackrel{m+1 \geq 3}{=} 3^m + 2 \cdot 3^m - ((-2)^m - 3(-2)^m) = 3^{m+1} - (-2)^{m+1}. \end{aligned}$$

$$2. (ii) \frac{a_n}{3^n + (-2)^n} = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{1 - (-\frac{2}{3})^n}{1 + (-\frac{2}{3})^n} \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \text{als } n \rightarrow \infty \quad (\text{II})$$

$$3. (i) \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|i-1|}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow \sqrt{2} > 1 \quad \text{als } n \rightarrow \infty$$

dan de reeks is divergent (in feite: $a_n \not\rightarrow 0$).

(ii) Breek de reeks $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln n}$:

niet abs. conv. want $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ en $\sum \frac{1}{n}$ div.

wel conv want alternierend en $\frac{1}{\ln n} \downarrow 0$ dan

we kunnen "Leibniz" toepassen.

De reeks $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ is dan relat. conv.; dan reeks

$\sum (-1)^n \frac{2i}{\ln n}$ dan ook relatief convergent.

(iii) $|a_n| = \frac{1}{n^2 \ln n}$ en dan $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ is

conv. dan $\sum a_n$ abs conv. (en dan zeker conv.)

4. Geef de homogene d.v. $y'' + y = 0$ oplossen.

Karakter. vgl. leidt: $\lambda^2 + 1 = 0$ dan $\lambda = \pm i$

Alg. opl. v/d homog. d.v.: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Een part. opl. v/d inhomog. d.v. is $y \equiv 1$.

De algemene oplossing v/d inhomogene d.v. leidt dus:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1.$$

Invullen van $y(0) = 3$ levert $C_2 = 2$

invullen van $y'(0) = 1$ levert $C_1 = 1$

De gevraagde oplossing leidt dus:

$$y = \sin x + 2 \cos x + 1$$

5. (1,1) voldoet aan de vergelijking.

Impliciet diff: level: $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$

(1,1) invullen geeft $3 + 3y' - 2 - 2y' = 0$ dan $y' = -1$

Vlgs. raaklijn dan: $(y-1) = -1(x-1)$ of wel $y+x=2$

$$6. \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot e^u \cos v + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot e^u \sin v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot -e^u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot e^u \cos v$$

$$\text{Dan } \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \cos v - \frac{\partial z}{\partial v} \sin v = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot e^u (\cos^2 v + \sin^2 v)$$

$$\text{Dan } x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot e^u \cos v = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \cos^2 v - \frac{\partial z}{\partial v} \sin v \cos v.$$

7. Ga over op bolcoörd. Dan:

$$\int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r \cos \theta \, r^2 \sin \theta \, dr) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi * \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta * \int_0^1 r^3 \, dr =$$

$$= 2\pi * \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} * \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$