

1. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x) = x^7 + x - 3$.

- (i) Toon aan dat f precies één reëel nulpunt heeft.
- (ii) Toon aan dat er een $a \in [-1, 0]$ bestaat waarvoor geldt dat $f'(a) = 2$.
- (iii) Zoals bekend heeft de vergelijking $x^7 + x - 3 = 0$ naast de reële oplossing ook zes complexe oplossingen. Laat zien dat als c een complexe oplossing is, dat dan zijn complex geconjugeerde, $\bar{c}$, ook een oplossing is.

2. Van de rij (a_n) is gegeven:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, & n \geq 3 \\ a_1 = 5, a_2 = 5 \end{cases}$$

- (i) Toon aan, door middel van volledige inductie, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$a_n = 3^n - (-2)^n.$$

- (ii) Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + (-2)^n}$.

3. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie. Vermeld in geval van convergentie of deze absoluut of relatief is.

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{(i-1)^n}{n^2}, \quad (ii) \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{2i}{\ln n}, \quad (iii) \sum_{n \geq 2} \frac{i^n}{n^2 \ln n}.$$

4. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + y = 1, \\ y(0) = 3, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Z.O.Z.

5. Bepaal de raaklijn in het punt $(1, 1)$ aan de kromme met vergelijking

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

6. Gegeven is een continu-differentieerbare functie $z = z(x, y)$.

We substitueren $x = e^u \cos v$ en $y = e^u \sin v$.

Druk vervolgens $x \frac{\partial z}{\partial x}$ uit in $u, v, \frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$.

7. Het gebied Ω wordt beschreven door

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

Bereken

$$\int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz.$$

[Hint: je kunt overgaan op bolcoördinaten.]

Normering:

1 : (i) 3	2 : (i) 5	3 : 8	4 : 7	5 : 4	6 : 5	7 : 6
(ii) 2	(ii) 2					
(iii) 3						
8	7	8	7	4	5	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1$$