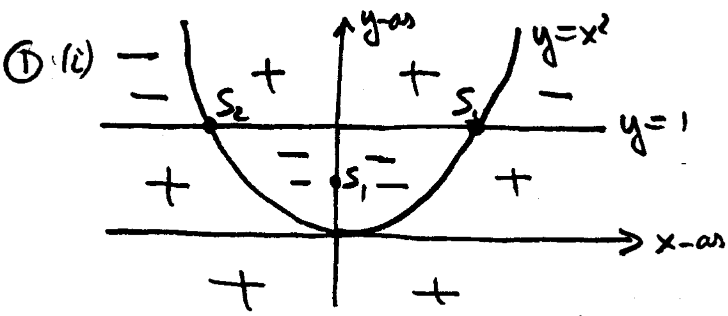
Uitwerking 3e toets Calculus II — 29 mei 1998

① (i)



(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ levert:

$$\begin{cases} -2yx+2x=0 \\ 2y-1-x^2=0 \end{cases}$$ dus $x=0$ of $y=1$

$x=0$ ingevuld in de 2e vgl levert $y=\frac{1}{2}$ en $y=1$ ingevuld in de 2e vgl levert $x=\pm 1$, dus we vinden de stationaire punten $S_1=(0,\frac{1}{2})$, $S_2=(-1,0)$ en $S_3=(1,0)$.

(iii) In S_2 en S_3 kunnen zich geen extremen bevinden, zoals in het tekenoverzicht te zien is. S_1 gaan we nader onderzoeken.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y+2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

Dus $D(S_1)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\Big|_{S_1}=4-4y-(-2x)^2\Big|_{S_1}=2>0$

Er bevindt zich dus een extreem in S_1 en wel een minimum, omdat $f_{xx}(S_1)=1>0$. De grootte is $f(S_1)=-\frac{1}{4}$.

② (i) $\ln 2=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}\right)+\text{fout}=\frac{3}{4}+\text{fout}=0.75+\text{fout}$

(ii) $\ln 2=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+0}+\frac{4}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+1}\right)+\text{fout}=\frac{25}{36}+\text{fout}=$

$=0.6944\ldots+\text{fout}$

[overigens: $\ln 2=0.693147\ldots\ldots$]

③ a) (i) Alleen in ∞ oneigenlijk. Er geldt $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{x\sqrt{x}}$ en $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx\,(=2)$ is convergent. Dus volgens het majorantiecriterium convergeert $\int^\infty \left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|dx$ ook en dus ook $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

(ii) Alleen in ∞ oneigenlijk: Dan geldt $\frac{\ln x}{x} > \frac{1}{x}$ (voor $x > e$).

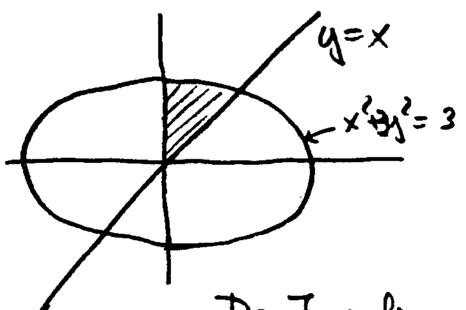
Omdat $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergent, divergent volgens het minorantie-criterium ook $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$.

b) Alleen in 0 oneigenlijk als $p>0$, anders nergens oneigenlijk.
We vergelijken de integrand met $\frac{1}{x^{p-1}}$, want:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^p} : \frac{1}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Volgens het limiet criterium convergent $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$ dan en slechts dan als $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}\,dx$ convergent. Deze laatste integraal convergent voor $p<2$, dus de gevraagde integraal ook.

④



$$\Phi = \begin{cases} x = R\sqrt{3}\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{met } \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \text{ en } 0 \le R \le 1,$$

want $x^2+3y^2=3$ wordt $R^2\cdot 3\cdot\cos^2\varphi + 3R^2\sin^2\varphi = 3$, dus $R=1$.

De Jacobimatrix van Φ luidt: $\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\varphi & -R\sqrt{3}\sin\varphi \\ \sin\varphi & R\cos\varphi \end{pmatrix}$

met determinant $R\sqrt{3}$. Dus:

$$\int_S x^3\,dx\,dy = \int_{R=0}^{1}\int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} R^3\cdot 3\sqrt{3}\cos^3\varphi \cdot R\sqrt{3}\,d\varphi\,dR = 9\int_{R=0}^{1} R^4\,dR \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{9}{5}\int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi \overset{\sin\varphi = t}{=\!=\!=} \frac{9}{5}\int_{t=\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} 1-t^2\,dt =$$

$$= \frac{9}{5}\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$