

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus III
Afdeling Wiskunde	18.30-20.30 uur
Vrije Universiteit	02-04-2008

Gebruik van rekenmachines, laptops, formulebladen, boeken etc. is **niet** toegestaan.
Motiveer al je antwoorden en schrijf duidelijk. Succes!

1. (i) Bepaal voor welke waarden van a en b het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (ax^2y + 3z)\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + (bx + z)\mathbf{k}$$

conservatief is en vind een potentiaalfunctie.

- (ii) Bereken, voor de bij (i) gevonden waarden van a en b ,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

waarbij C het beeld is van de geparametriseerde kromme

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3 - 2\cos t - \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Zij S het deel van de paraboloid $z = 1 + x^2 + y^2$ dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ ligt, met eenheidsnormaalvector $\hat{N}$ gericht naar boven, en beschouw het vectorveld $\mathbf{F} = -3y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$. Maak een schets van S en bereken

$$\iint_S (\mathbf{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS,$$

de omhoog-gaande flux van de rotatie van $\mathbf{F}$ door S .

3. Bereken de uitgaande flux van het vectorveld $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ door het deel van van de eenheidsbolschil $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dat in het eerste octant van de ruimte ligt. (Het *eerste octant* is het deel van de ruimte waarvoor $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $z \geq 0$.) Wat is de flux door de hele eenheidsbolschil?

Z.O.Z.

4. (i) Bereken de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}.$$

- (ii) Onderzoek de volgende reeksen op absolute convergentie, dan wel relatieve convergentie, dan wel divergentie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n! \sqrt{n}},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 2n}{n^3 - 3}.$

5. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-2)^n}{2^n}$$

Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van deze machtreeks. Onderzoek in het bijzonder het gedrag van de machtreeks in de randpunten van het convergentie-interval.

6. Bepaal een machtreeksontwikkeling voor de functie $f(x) = e^{-3x}$ om $x = 0$. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ convergeert de machtreeks naar de functie f ?

Normering: 1) 5 punten, 2) 5 punten, 3) 5 punten, 4) 5 punten, 5) 4 punten, 6) 3 punten.

Eindcijfer:

$$\frac{\# \text{ punten}}{3} + 1$$