

1. a) $\int_4^\infty \frac{5}{x^2 - x - 6} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x+2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x-3}{x+2} \right]_4^t =$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{t-3}{t+2} - \ln \frac{4-3}{4+2} = \ln 6.$
- b) Substitueer $u = e^x$ en bereken $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx = \int \frac{1}{u^2 + 4} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u/2)^2 + 1} d\left(\frac{u}{2}\right) =$
 $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + C.$ Dus $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) \right]_0^1 =$
 $\frac{1}{2} \left(\arctan\left(\frac{e}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right).$

2. Bedenk dat op $[0, \frac{\pi}{4}]$ de cosinus daalt van 1 naar $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dus $1 \geq \cos^4 x \geq \frac{1}{4}$ voor x in $[0, \frac{\pi}{4}]$. Dus $2 \geq 1 + \cos^4 x \geq \frac{5}{4}$ en $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \cos^4 x} \leq \frac{4}{5}$. We krijgen

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \cos^4 x} dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{4}{5} dx \text{ en dus } \frac{\pi}{8} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \cos^4 x} dx \leq \frac{\pi}{5}.$$

3. a) Neem $a_n = (-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}$. Dan $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{3^n} \right| = \frac{3}{n+2}$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$
 $0 < 1$, wat bewijst dat de reeks absoluut convergent is.

- b) Voor de tweede som merken we op dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$ en dus gaat de algemene term niet naar nul: de reeks is divergent.

4. a) Zij $a_n = \frac{x^n}{2^n \ln n}$. We zien $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{2} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \right|$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$ omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 1.$$

De reeks is convergent als $\frac{|x|}{2} < 1$ en divergent als $\frac{|x|}{2} > 1$. De convergentiestraal R is dus 2

- b) Voor $x = 2$ is de algemene term van de reeks $\frac{1}{\ln(n)}$. Daar $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n+1}$ voor alle n en de reeks met algemene term $\frac{1}{n+1}$ divergent is, is ook onze machtreeks divergent voor $x = 2$.

Voor $x = -2$ is de algemene term $(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$. De reeks is alternerend, de algemene term daalt monotoon naar 0. Daarnet bij a) zagen we dat de reeks niet absoluut convergent is en dus is de reeks relatief convergent.

5. a) $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$. Invullen van $\frac{\pi}{2}$ geeft $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'''(\frac{\pi}{2}) = 1$. De derdegraads Taylorveelterm rond $\frac{\pi}{2}$ is dus $-(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3$.

- b) De som van de reeks lijkt op die van een meetkundige reeks. Vandaar $\frac{x}{10+x} =$

$$\frac{x}{10} \frac{1}{1 + \frac{x}{10}} = \frac{x}{10} \frac{1}{1 - \frac{-x}{10}} = \frac{x}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{10^n}.$$

6. a) Voor de stationaire punten berekenen we dat $f_x(x, y) = 4xy - 2y^2 + 6x$ en $f_y(x, y) = 2x^2 - 4xy = 2x(x - 2y)$. We zien dat $f_y(x, y) = 0$ als $x = 0$ of $x = 2y$.

Eerst voor $x = 0$. Dan ook $f_x(x, y) = 0$ als $f_x(0, y) = -2y^2 = 0$ wat geeft $y = 0$. Eerste conclusie: $(0, 0)$ is een stationair punt.

Nu voor $x = 2y$. Dan $f_x(2y, y) = 6y^2 + 12y = 6y(y + 2) = 0$ als $y = 0$ en als $y = -2$. Dat levert de stationaire punten $(0, 0)$ (opnieuw) en $(-4, -2)$.

Samenvattend: de stationaire punten zijn $(0, 0)$ en $(-4, -2)$.

- b) Op de lijn van $(0, 0)$ naar $(1, 0)$ is de functie $f(x, 0) = 1 + 3x^2$. Die heeft in $(0, 0)$ minimum 1 en in $(1, 0)$ een maximum 4.

Op de lijn van $(1, 0)$ naar $(1, 1)$ is de functie $f(1, y) = 2(-y^2 + y + 2)$. De grafiek is een bergparabool die voor $y = 0$ en $y = 1$ de waarde 4 heeft en dus in $y = \frac{1}{2}$ een maximum heeft, dat blijkt $4\frac{1}{2}$ te zijn.

Op de lijn van $(0, 1)$ naar $(1, 1)$ is de functie $f(x, 1) = 5x^2 - 2x + 1$. De afgeleide naar x is $10x - 2$ en dus minimum voor $x = \frac{1}{5}$ ter waarde van $\frac{4}{5}$. De waarde in $(0, 1)$ is 1.

Tenslotte op lijn van $(0, 0)$ naar $(0, 1)$ hebben we $f(0, y) = 1$. De functie is dus daar constant 1.

Samenvattend: minimum $\frac{4}{5}$ in $(\frac{1}{5}, 1)$ en maximum $4\frac{1}{2}$ in $(1, \frac{1}{2})$.

7. a)

$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^y \cos(y^2) dx dy =$$

$$\int_0^1 y \cos(y^2) dy = \left[\frac{1}{2} \sin(y^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sin 1.$$

- b)

$$\iint_S \sqrt{(x^2 + y^2)} dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^2 r^2 dr = \frac{2\pi}{3}.$$