

Het gebruik van boeken, diktaten en rekenmachines is toegestaan.

Normering:

$$\begin{array}{l} 1a : 5 \quad ; \quad 2 : 8 \quad ; \quad 3a : 5 \quad ; \quad 4 : 9 \quad ; \quad 5a : 3 \quad ; \quad 6 : 9 \\ b : 5 \quad ; \quad \quad \quad b : 3 \quad ; \quad \quad \quad b : 3 \quad ; \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad c : 4 \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{totaal} + 6}{6}.$$

1. De functie $f(x)$ is de 2π -periodieke functie, die op het interval $-\pi < x \leq \pi$ gegeven is door $f(x) = x^2$.
 - (a) Bepaal de Fourierreeks van $f(x)$.
 - (b) Gebruik de formule van Parseval om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ te berekenen.
2. De verzameling $R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^2$ is een ring rondom de oorsprong. Bereken

$$\int_R xy(x + y + 1) dx dy.$$

3. Beschouw het probleem

$$2(x + 1)y' - y = 0; \quad y(0) = 1.$$

Laat $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ de machtreeksoplossing zijn.

- (a) Bepaal een recursieformule voor de a_k (u hoeft die recursie niet op te lossen!)
 - (b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksoplossing.
4. Vind het maximum/ de maxima van $f(x, y, z) = x + y + z$ op de ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \frac{11}{6}$
 5. Beschouw de rij $x_1, x_2, \dots$, gegeven door

$$x_1 = 0; \quad x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k} \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Laat zien (bijvoorbeeld met inductie) dat $\{x_k\}$ een stijgende rij is.
 - (b) Bewijs (bijvoorbeeld met inductie) dat voor alle k geldt: $x_k < 2$.
 - (c) Uit het voorgaande volgt (dat hoeft u niet te bewijzen) dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ bestaat. Bereken die limiet.
6. Onderzoek of

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) \ln(1 + y^4)}{x^4 + y^4}$$

bestaat en bereken die limiet als het antwoord bevestigend is.

Hint Het kan handig zijn om de limiet

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + a)}{a}$$

te berekenen.