

Tentamen Calculus II voor S, F, MNW.

18 december 2006, 12.00-14.45

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. Er zijn 45 punten te behalen (cijfer=(5+aantal punten)/10). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

- (a) (3 punten) Bereken alle stationaire punten van f .
- (b) (3 punten) Bepaal alle lokale extremen van f .

2. (5 punten) Laat $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn. Substitutie van $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ in $w = f(x, y)$ geeft $w = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Druk $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ uit in r , θ , $\frac{\partial w}{\partial r}$ en $\frac{\partial w}{\partial \theta}$.

3. (5 punten) Laat $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$. Bereken

$$\int \int_D (x^2 + y^2) dA.$$

4. (a) (4 punten) Bepaal het convergentiegedrag van de volgende reeksen, licht je antwoord toe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{k^3}.$$

(b) (3 punten) Bereken de convergentiestraal van de reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{7n}}{3^{2n}}.$$

5. Laat $y(x)$ voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$y'' - xy' - x^2y = 0$$

met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(a) (2 punten) Laat zien dat $y''(0) = 0$ en $y'''(0) = 1$.

(b) (4 punten) Toon met behulp van de methode van Leibniz-MacLaurin aan dat voor $n \geq 2$,

$$y^{(n+2)}(0) - ny^{(n)}(0) - n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0.$$

(c) (2 punten) Geef de MacLaurinreeks voor de oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking (met de bijbehorende beginvoorwaarden) tot en met de term met x^7 .

6. De functie g wordt op het interval $[0,1]$ gedefinieerd door

$$g(x) = 3 - 3x.$$

(a) (2 punten) Moet je de cosinusreeks of de sinusreeks van g berekenen om ervoor te zorgen dat de waarde van de som van deze reeks voor alle $x \in [0,1]$ gelijk is aan $g(x)$? Geef een duidelijke toelichting!

(b) (4 punten) Bereken de cosinusreeks van g .

7. Voor een functie $u(x, t)$ die gedefinieerd is voor $0 \leq x \leq 5$ en $t \geq 0$ is de volgende partiële differentiaalvergelijking gegeven:

$$25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(a) (3 punten) We zijn op zoek naar oplossingen van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$. Geef (met behulp van de methode van scheiding van variabelen) de twee gewone differentiaalvergelijkingen waaraan $X(x)$ en $T(t)$ moeten voldoen.

(b) (2 punten) Geef het functievoorschrift van $u(x, t)$ als verder gegeven is dat $T(t)$ periodiek is in t .

(c) (3 punten) Neem, ongeacht het antwoord dat je bij onderdeel (b) hebt gevonden, aan dat oplossingen die aan de bij (b) genoemde voorwaarde voldoen, van de vorm

$$u(x, t) = (A \cos(wx) + B \sin(wx))(C \cos(5wt) + D \sin(5wt))$$

zijn, waarbij A, B, C, D en $w > 0$ constanten zijn. Geef de oplossing van de partiële differentiaalvergelijking die aan de volgende randvoorwaarden voldoet:

- $u(0, t) = u(5, t) = 0$, voor $t \geq 0$.
- $u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)$ voor $0 \leq x \leq 5$.
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, voor $0 \leq x \leq 5$. ($\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ is een andere notatie voor $u_t(x, 0)$)