

Tweede deeltentamen Calculus II voor S, F, MNW.

18 december 2006, 12.00-14.00

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn 27 punten te behalen (cijfer = $(3 + \text{aantal punten})/3$). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. Laat $y(x)$ voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$y'' - xy' - x^2y = 0$$

met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(a) (2 punten) Laat zien dat $y''(0) = 0$ en $y'''(0) = 1$.

(b) (4 punten) Toon met behulp van de methode van Leibniz-MacLaurin aan dat voor $n \geq 2$,

$$y^{(n+2)}(0) - ny^{(n)}(0) - n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0.$$

(c) (2 punten) Geef de MacLaurinreeks voor de oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking (met de bijbehorende beginvoorwaarden) tot en met de term met x^7 .

2. De functie f is periodiek met periode 4 en wordt op het interval $-2 < x \leq 2$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1, \\ -2 & \text{als } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{als } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{als } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) (1 punt) Teken de grafiek van f op het interval $[-6, 6]$.

(b) (3 punten) Bereken de Fourierreeks van f .

(c) (2 punten) Teken de grafiek van de waarde van de som van de Fourierreeks van f (als functie van x) op het interval $[-6, 6]$.

3. De functie g wordt op het interval $[0, 1]$ gedefinieerd door

$$g(x) = 3 - 3x.$$

(a) (2 punten) Moet je de cosinusreeks of de sinusreeks van g berekenen om ervoor te zorgen dat de waarde van de som van deze reeks voor alle $x \in [0, 1]$ gelijk is aan $g(x)$? Geef een duidelijke toelichting!

(b) (3 punten) Bereken de cosinusreeks van g .

4. Voor een functie $u(x, t)$ die gedefinieerd is voor $0 \leq x \leq 5$ en $t \geq 0$ is de volgende partiële differentiaalvergelijking gegeven:

$$25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(a) (3 punten) We zijn op zoek naar oplossingen van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$. Geef (met behulp van de methode van scheiding van variabelen) de twee gewone differentiaalvergelijkingen waaraan $X(x)$ en $T(t)$ moeten voldoen.

(b) (2 punten) Geef het functievoorschrift van $u(x, t)$ als verder gegeven is dat $T(t)$ periodiek is in t .

(c) (3 punten) Neem, ongeacht het antwoord dat je bij onderdeel (b) hebt gevonden, aan dat oplossingen die aan de bij (b) genoemde voorwaarde voldoen, van de vorm

$$u(x, t) = (A \cos(wx) + B \sin(wx))(C \cos(5wt) + D \sin(5wt))$$

zijn, waarbij A , B , C , D en $w > 0$ constanten zijn. Geef de oplossing van de partiële differentiaalvergelijking die aan de volgende randvoorwaarden voldoet:

- $u(0, t) = u(5, t) = 0$, voor $t \geq 0$.
- $u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)$, voor $0 \leq x \leq 5$.
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, voor $0 \leq x \leq 5$. ($\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ is een andere notatie voor $u_t(x, 0)$)