

Tentamen Calculus II voor S, F, MNW.

19 december 2005, 13.30-16.30

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Er zijn 36 punten te behalen (cijfer=(4+aantal punten)/4). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. (6 punten) Gegeven is de functie $f(x, y) = x^2 + y^2 + \sin xy$.
Bereken $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2. (a) (3 punten) Bereken

$$\iint_D (x + y) dy dx,$$

waarbij D het gebied is dat begrensd wordt door de lijnen $y = 0$, $y = x$ en $x = 2$.

(b) (3 punten) Bereken

$$\iint_D (x^2 + y^2) dy dx,$$

waarbij D de cirkelschijf met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1 is. Hint: gebruik poolcoördinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

3. (a) (3 punten) Onderzoek de convergentie van de volgende reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$$

(b) (3 punten) Gegeven is de machtreeks

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n.$$

Bereken de convergentiestraal R van deze machtreeks en laat zien dat de reeks op de grens van het convergentiegebied divergeert.

4. Laat $y(x)$ voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$(4 - x^2)y'' - 2xy' + y = 0$$

met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(a) (1 punt) Laat zien dat $y''(0) = 0$ en $y'''(0) = \frac{1}{4}$.

(b) (3 punten) Toon met behulp van de methode van Leibniz-MacLaurin aan dat voor $n \geq 2$,

$$4y^{(n+2)}(0) = (n^2 + n - 1)y^{(n)}(0).$$

(c) (2 punten) Geef de MacLaurinreeks voor de oplossing van de differentiaalvergelijking tot en met de term met x^5 .

5. We beschouwen de 2π -periodieke functie f die op het interval $-\pi < x \leq \pi$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x < 0, \\ x & \text{als } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) (1 punt) Teken de grafiek van f op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) (4 punten) Bereken de Fourierreeks van f .

(c) (1 punt) Voor welke waarden van x is de som van de Fourierreeks in x gelijk aan $f(x)$? Wat is de waarde van de Fourierreeks van f in de overige waarden van x ?

6. Voor een functie $u(x, t)$ die gedefinieerd is voor $0 \leq x \leq 1$ en $t \geq 0$ is de volgende partiële differentiaalvergelijking gegeven:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

(a) (2 punten) We zijn op zoek naar oplossingen van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$. Geef (met behulp van de methode van scheiding van variabelen) de twee gewone differentiaalvergelijkingen waaraan $X(x)$ en $T(t)$ moeten voldoen.

(b) (2 punten) Stel dat gegeven is dat de oplossing $u(x, t)$ voor $x \in [0, 1]$ voldoet aan $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. Hoe ziet $u(x, t)$ er dan uit?

(c) (2 punten) Neem, ongeacht het antwoord dat je bij onderdeel (b) hebt gevonden, aan dat oplossingen die aan de bij (b) genoemde voorwaarde voldoen, van de vorm

$$u(x, t) = (A \cos wx + B \sin wx)e^{-w^2 t}$$

zijn, waarbij A , B en $w > 0$ constanten zijn. Geef de oplossing $u(x, t)$ die aan de volgende randvoorwaarden voldoet:

- $u(0, t) = u(1, t) = 0$, voor $t \geq 0$.
- $u(x, 0) = 3 \sin 4\pi x$, voor $0 \leq x \leq 1$.