

1 *Partiële afgeleiden.*

Gegeven de functie $V = (A \cdot r^n + B \cdot r^{-n}) \cdot \cos(n \cdot \theta + \varepsilon)$ met A, B, n en ε constant.

- a) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial V}{\partial r}$ en $\frac{\partial V}{\partial \theta}$.
- b) Bepaal de tweede orde partiële afgeleiden $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$; $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial r}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$.
- c) Toon aan dat:
$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

2 *De kortste afstand tot een hyperbool.*

Gegeven de hyperbool $H \equiv 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - y^2 = -10$.

- a) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial H}{\partial x}$ en $\frac{\partial H}{\partial y}$.
- b) Op een deel van deze hyperbool kan y worden gezien als een functie van x . We kunnen daar dus spreken over de *afgeleide van y naar x* . Deze afgeleide kan via impliciet differentiëren worden verkregen als een functie $f(x, y)$ uit $\frac{\partial H}{\partial x}$ en $\frac{\partial H}{\partial y}$. Geef deze functie $f(x, y)$.
- c) Voor het bepalen van de kortste afstand van het punt $(0, 0)$ naar de hyperbool gebruiken we het kwadraat van de afstandsfunctie tussen een punt (x, y) en het punt $(0, 0)$ (volgens Pythagoras). Geef de partiële afgeleiden die horen bij deze afstandsfunctie.
- d) Volgens de multiplicatoren methode van Lagrange kan nu de kortste afstand van $(0, 0)$ naar de hyperbool worden bepaald. Geef de vergelijkingen waaraan een punt van kortste afstand moet voldoen.

3 *Integreren over een deel van $\mathbb{R}^2$.*

Gegeven een integraal $\int_D f(x, y) dx dy$ over een gebied D .

- a) Neem voor D het gebied dat begrensd wordt door de parabolen $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$. De integraal wordt dan gegeven via
$$\int_{x=0}^1 dx \int_{l(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$
 Bepaal de twee grensfuncties $l(x)$ en $h(x)$.
- b) Bepaal de uitkomst van deze integraal als gegeven is dat $f(x, y) = x^2 + y$.
- c) Neem voor D het gebied dat begrensd wordt door de hyperbool $y = \frac{1}{x}$ en de lijnen $x = y$ en $x = 2$. De integraal wordt dan gegeven via
$$\int_{x=1}^2 dx \int_{l(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$
 Bepaal de twee grensfuncties $l(x)$ en $h(x)$.

4 *Integraal transformaties in $\mathbb{R}^2$.*

Gegeven een integraal $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ over een gebied D , waarin D de binnenkant van de halve cirkel in het positieve kwadrant met straal 1 en middelpunt $(0, 1)$ is.

- Maak een schets van het aangegeven gebied.
- Transformeer de gegeven integraal naar poolcoördinaten. Geef daarbij duidelijk aan welke waarde de Jacobiaan van de transformatie heeft. Geef aan welke grensfuncties nu voor de integralen moeten worden gebruikt. Aanwijzing: Zonder bewijs mag gebruik gemaakt worden van de voorstelling van deze gegeven halve cirkel: $r = 2 \cdot \cos \theta$.
- Bepaal uitkomst van deze integraal.

5 *Machtreeksen.*

Gegeven is de machtreeks $M(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n-1)}$.

- Bepaal de convergentiestraal R van deze machtreeks en bewijs dat de machtreeks absoluut convergeert op de grenzen van het convergentiegebied.
- Bepaal de eerste en de tweede afgeleide van de machtreeks, en onderzoek opnieuw de convergentie op de grenzen van de convergentiegebieden.
- Bepaal de som van de tweede afgeleide van de machtreeks binnen de convergentiestraal.
- Bewijs dat de som van de oorspronkelijke machtreeks op het convergentie gebied voldoet aan $M(x) = x + (1-x) \cdot \ln |1-x|$.

NORMERING

1a 2 pt	2b 3 pt	3b 4 pt	4c 4 pt	5d 4 pt
1b 3 pt	2c 1 pt	3c 3 pt	5a 2 pt	
1c 3 pt	2d 3 pt	4a 2 pt	5b 2 pt	
2a 2 pt	3a 2 pt	4b 3 pt	5c 2 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

FORMULES

Van de volgende formules mag zonder toelichting gebruik worden gemaakt :

Poolcoördinaten : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan y/x$, $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$.

$$\cos \phi = \sin(\frac{1}{2}\pi - \phi), \quad \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2 \cdot x;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$