Uitwerking Tentamen Calculus 1 van 17-1-2005.

1.a) Er moet gelden: $-3+4x-x^2 = (3-x)(x-1) \geq 0$. Oftewel $1 \leq x \leq 3$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-3+4x-x^2}} \cdot (-2x+4)$. Dus $f'(x)=0$ in $x=2$. f heeft randminima in $x=1$ en $x=3$ ter grootte 0 en een maximum in $x=2$ ter grootte 1.

2.a) $f(0)=0$ en $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+x = 0$ en $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0$; dus f continu in

b) $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x+1 = 1 \\ &\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}\right\}$$ dus f is differentieerbaar in $x=0$ met $f'(0)=1$.

3. Voer in $f(x) = x^5+2x^3+6x$. f is differentieerbaar (dus continu) op $\mathbb{R}$. $f(0) = 0 < 6$ en $f(1) = 9 > 0$, dus volgens de tussenwaardestelling is er minimaal één c waarvoor $f(c)=6$. $f'(x) = 5x^4+6x^2+6 > 0$ voor alle x, dus (gevolg middelwaardestelling) f stijgt op $\mathbb{R}$ en er is dus maximaal één c waarvoor $f(c)=6$. Conclusie: $f(x)=6$ heeft precies één reële oplossing.

4. a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin x + x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}+xe^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}} = \frac{0+1}{1+0} = 1,$$ want $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en de insluitstelling.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{2x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} 2x\ln x}$. Met L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln x = \lim_{x\to 0^+} 2\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} 2\cdot\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0,$$

dus $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x} = e^0 = 1$.

5. $2x^2+3y^3-5xy=0$. Impliciet differentiëren naar x:

$4x+9y^2\cdot y'-5y-5xy'=0$, dus:

$y'(9y^2-5x)=5y-4x$, dus: $y'=\dfrac{5y-4x}{9y^2-5x}$.

6. a) Twee maal partieel integreren geeft: $\int x^2\sin 2x=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x$

$+\int x\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=$

$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

b) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow[dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx]{t=\sqrt{x}} \int 2e^t\,dt=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C$.

7. a) $\int 2x\,dx=x^2$, dus vermenigvuldig met e^{x^2}:

$y'e^{x^2}+2xe^{x^2}y=(ye^{x^2})'=x$, dus:

$ye^{x^2}=\frac{1}{2}x^2+C$, dus $y=(\frac{1}{2}x^2+C)e^{-x^2}$.

b) Vul in $y=e^{Rx}$. Dan: $e^{Rx}(R^2+R-2)=0$, dus $R=1$ of $R=-2$.
De algemene opl. luidt dus: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \\ y'(0)=3 \Rightarrow c_1-2c_2=3 \end{array}\right\} \quad c_1=1 \text{ en } c_2=-1$$

Dus: $y(x)=e^x-e^{-2x}$.