

1. (a)

$$\frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + x - 3}{(x - 1)(x + 1)} = 1 + \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}.$$

Dus

$$\int \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1} dx = x + \ln \frac{(x + 1)^2}{x - 1} + C.$$

Dan

$$\int_2^3 \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1} dx = 1 + \ln 8 - \ln 9.$$

(b)

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = [-\cos(\ln x)]_1^{e^\pi} = \cos 0 - \cos \pi = 2.$$

(c) Merk op

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 10} = \frac{1}{(x + 1)^2 + 9} = \frac{1}{9} \frac{1}{(\frac{x+1}{3})^2 + 1}.$$

Dus

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{1}{3} \arctan \frac{x + 1}{3} + C.$$

Tenslotte

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \arctan \frac{x + 1}{3} \right]_2^t = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

2. $f'(x) = \arctan(4(\sin x)^2 \cos(x))$. Dus $f'(\frac{\pi}{6}) = \arctan(4(\sin \frac{\pi}{6})^2 \cos(\frac{\pi}{6})) = \arctan(1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

3. (a) Met a_n de algemene term rekenen we uit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}+1} \frac{2^n+1}{n}$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2}$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$. De reeks is dus absoluut convergent.

(b) Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+3}} = 1$ gaat de algemene term niet naar nul. De reeks is dus divergent.

4. (a) Neem a_n de coëfficiënt van x^n . We bepalen $\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = |2x| \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = |2x|$. Daarom convergeert de machtreeks voor $|2x| < 1$ en divergeert de machtreeks voor $|2x| > 1$. De convergentiestraal is derhalve $\frac{1}{2}$.

(b) Als $x = \frac{1}{2}$, dan is de algemene term van de reeks $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ en dus is de reeks alternierend, gaat de algemene term naar nul en is de absolute waarde van de algemene term monotoon dalend. De reeks is dus convergent.

Als $x = -\frac{1}{2}$, dan is de algemene term van de reeks $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ en hebben we dus een p-reeks met $p = \frac{1}{2}$. De reeks is dus divergent voor $x = -\frac{1}{2}$.

5. De formule is $P_{2,e}(x) = f(e) + f'(e)(x - e) + \frac{1}{2!}f''(e)(x - e)^2$. Invullen: $f(e) = \ln(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$ en $f''(e) = -\frac{1}{e^2}$. Dus $P_{2,e}(x) = 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2$.

6. (a) Bereken $f_x(x, y) = 4x(x^2 - y)$ en $f_y(x, y) = 6y - 2x^2 - 8$. Dan $f_x(x, y) = 0$ als $x = 0$ of als $y = x^2$. Als $x = 0$ dan $f_y(x, y) = 0$ betekent dat $y = \frac{4}{3}$. Als $y = x^2$ dan volgt uit $f_y(x, y) = 0$ dat $4(x^2 - 2) = 0$, en dus dat $x = \sqrt{2}$ en $y = 2$ of $x = -\sqrt{2}$ en $y = 2$. De stationaire punten zijn dus $(0, \frac{4}{3})$, $(\sqrt{2}, 2)$ en $(-\sqrt{2}, 2)$.

(b) We berekenen $A = f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4y$, $B = f_{xy}(x, y) = -4x$ en $C = f_{yy}(x, y) = 6$.

	A	B	C	$\Delta = AC - B^2$
$(0, \frac{4}{3})$	$-\frac{16}{3}$	0	6	-32
$(\sqrt{2}, 2)$	16	$-4\sqrt{2}$	6	64
$(-\sqrt{2}, 2)$	16	$4\sqrt{2}$	6	64

waaruit we zien dat er in $(\sqrt{2}, 2)$ en $(-\sqrt{2}, 2)$ minima zijn en dat $(0, \frac{4}{3})$ een zadelpunt is.

7. (a)

$$\int_0^2 \int_{-2}^{-y} ye^{x^3} dx dy = \int_{-2}^0 \int_0^{-x} ye^{x^3} dy dx = \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2} y^2 e^{x^3} \right]_0^{-x} dx = \int_{-2}^0 \frac{x^2}{2} e^{x^3} dx = \frac{1 - e^{-8}}{6}.$$

(b) In poolcoördinaten

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^1 \sin(r^2) r dr d\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[-\frac{1}{2} \cos(r^2) \right]_0^1 d\theta = \pi \left(\frac{1}{2} (1 - \cos(1)) \right).$$

