

1. a)  $\int_2^x x e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \Big|_2^x = \left( I \right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2 \cdot 2^2} \rightarrow \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$  als  $x \rightarrow \infty$

$\left( \frac{1}{4} \right)$  is de waarde van de (convergente) oneigenlijke integraal.

b) Voor breukoptelling uit:

$\frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$

Om  $2x-1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$ .

$x=0$  en  $x=1$  invullen geeft:  $A=-1$  en  $C=1$   
coëff. van  $x^2$ :  $0 = A+B$  dus  $B=1$ . Vervolgens:

$\int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$ .

c)  $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$   $\frac{d}{dx} \frac{u}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   $\int \arctan u \, du \stackrel{P.i.}{=} \frac{P.i.}{x-1}$

$u \arctan u \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} - \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} u \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \left[ u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} \arctan \sqrt{5} - \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 =$

$= \sqrt{5} \arctan \sqrt{5} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

2. a)  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0 < 1$

dus deze reeks is absoluut convergent.

b)  $\frac{1+\sqrt{n}}{n} > \frac{1}{n}$  en  $\sum \frac{1}{n}$  is divergent dus deze reeks

is niet absoluut convergent.

De reeks is alternierend en  $|u_n| = \frac{1+\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

gaat monoton naar  $0+0=0$  dus de reeks is

niet convergent (Leibniz). Eindconclusie:

Dus de reeks is relatief convergent.

2. c)  $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$  als  $n \rightarrow \infty$  dus

$\frac{1}{\arctan n} \rightarrow \frac{2}{\pi}$  als  $n \rightarrow \infty$

dus  $\frac{(1-i)^n}{\arctan n} \not\rightarrow 0$  dus deze reeks divergeert.

3. a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} 5^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1}$  is een Meetkundige Reeks

met reden  $\frac{2}{5}$ . Dus convergent met som  $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

4. (i)  $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot x^{3n}}{n \cdot 8^{n+1}}} = \frac{|x|^3}{8 \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{8}} \rightarrow \frac{|x|^3}{8}$  als  $n \rightarrow \infty$

dus (ab) convergent als  $|x| < 2$

en divergent als  $|x| > 2$ .

Dus convergentie - gebied  $R \equiv 2$ .

(ii)  $x=R=2$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n \cdot 8^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  is divergent

(want de harmonische reeks is ook divergent)

$x=-R=-2$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{n \cdot 8^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  is

(relatief) convergent want voldoet aan het criterium van Leibniz voor alternandi reksen.

4. a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6x - 12y = 0$  (x)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 12x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$  invullen in (x)

geeft  $x^2 - x - 3x = 0$  dus  $x=0$  of  $x=4$

dus 2 station. punten:  $(0,0)$  en  $(4,6)$

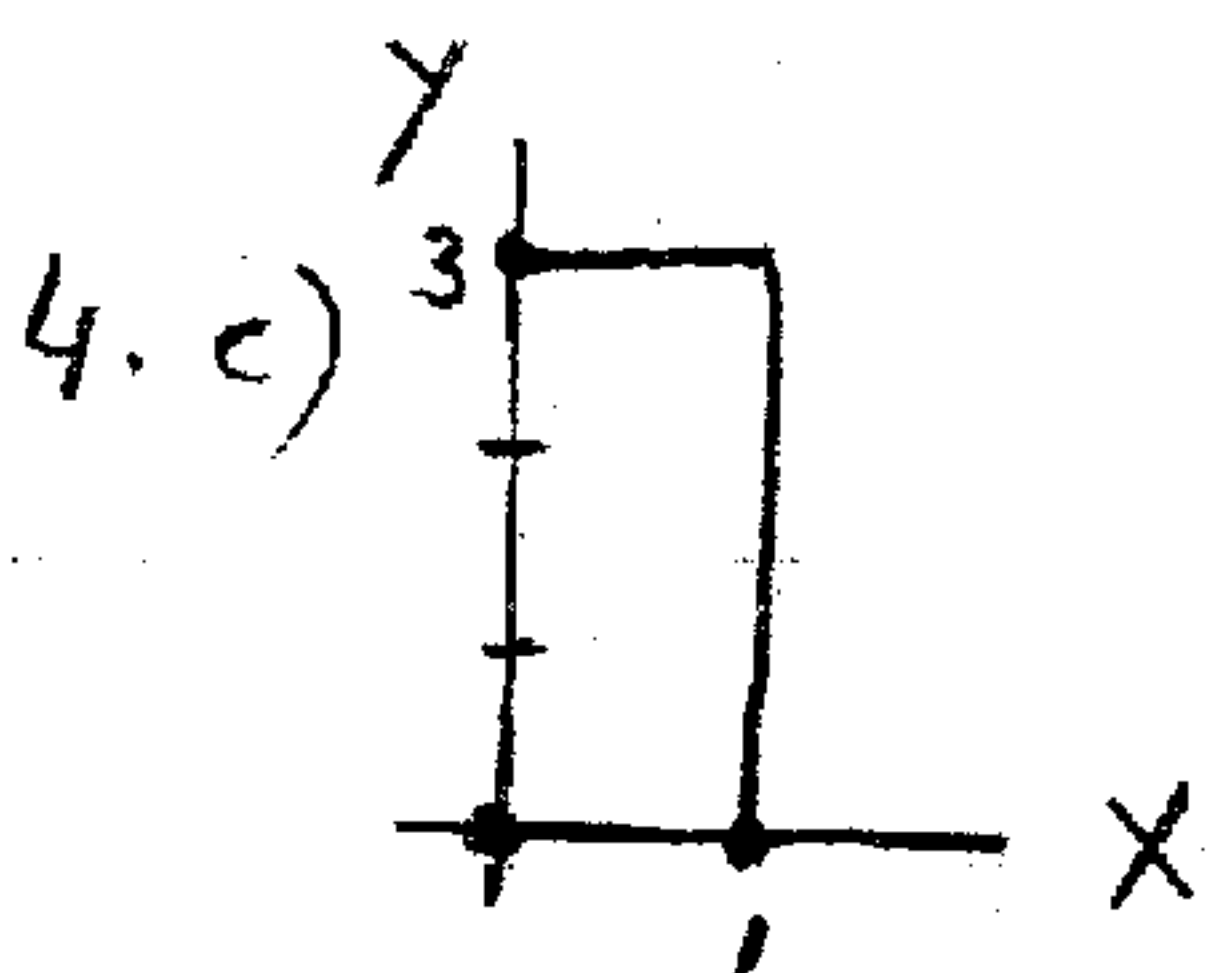
b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8$   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12$

Om  $\Delta = (12x-6) \cdot 8 - 144$

$\Delta(0,0) = 8 < 0$  dus daar saddlepunt

$\Delta(4,6) = 8 > 0$  dus daar een extreem waarde

en wel een minimum



We bekijken het verloop van  $f$  op de 4 zijden van de rektloek:

- $f(x, 0) = 2x^3 - 3x^2 + 10 = k(x)$   
 $k'(x) = 6x^2 - 6x \leq 0$  op  $[0, 1]$

dan  $f$  daalt op deze zijde van 10  $\rightarrow$  9

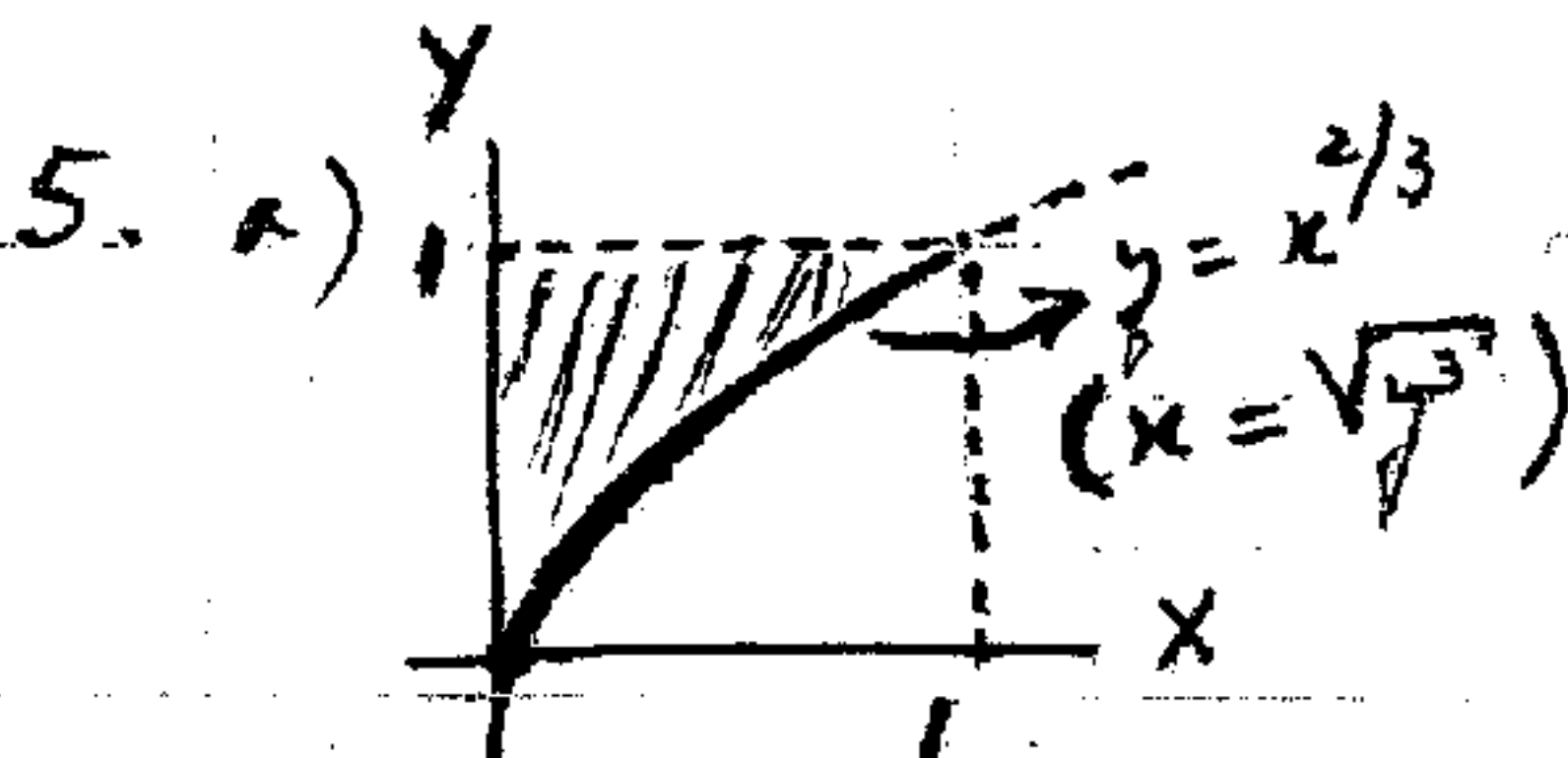
- $f(0, y) = 4y^2 + 10$  loopt op van 10 naar 46

- $f(x, 3) = 2x^3 - 3x^2 + 36 - 36x + 10 = k(x)$

$$k'(x) = 6x^2 - 6x - 36 < 0 \text{ op } [0, 1] \text{ dan } f \text{ daalt op deze zijde van 46 naar 9}$$

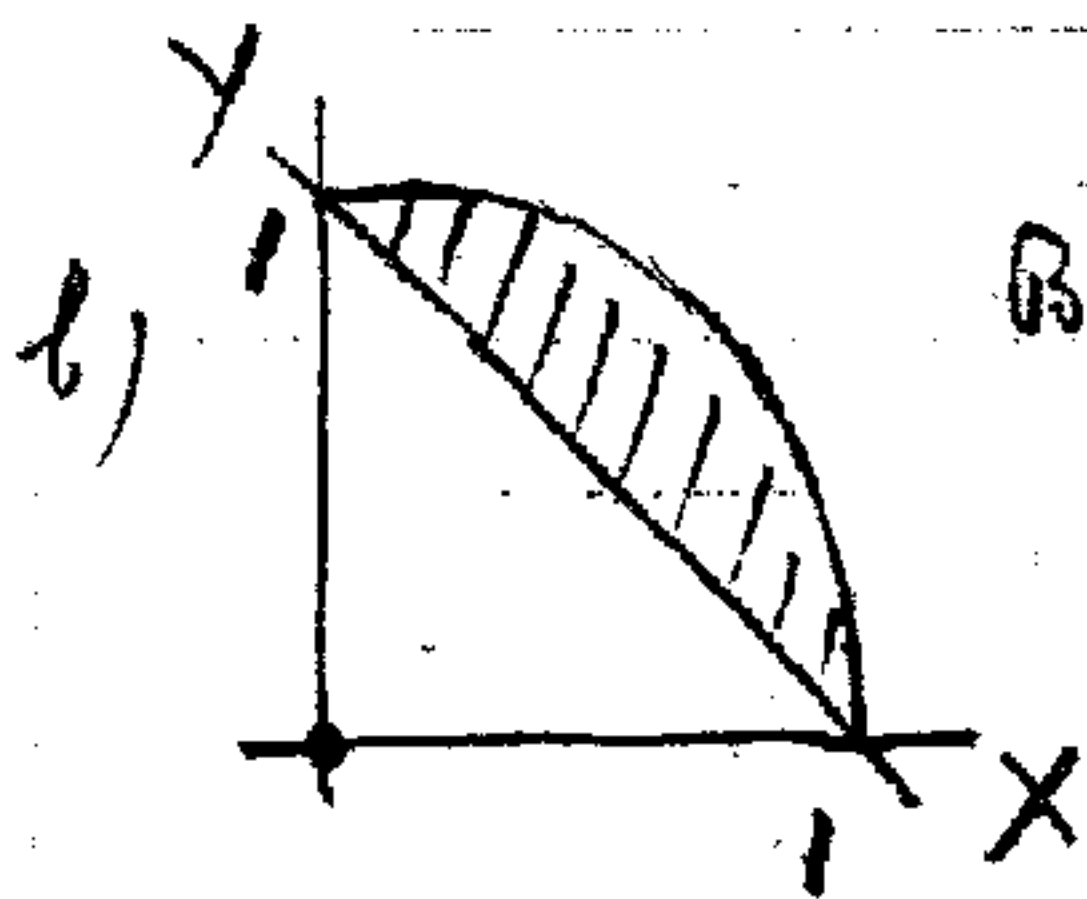
- $f(1, y) = 2 - 3 + 4y^2 - 12y + 10 = 4y^2 - 12y + 9 = (2y - 3)^2$  neemt op deze zijde alle waarden van 0 tot 9 (2x) aan.

Den grootste waarde 46 (in  $(0, 3)$ ) en kleinste waarde 0 (in  $(1, \frac{3}{2})$ )



Verwisseling van integratievolgorde levert:

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt[3]{y^3}} x \cos y^4 dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^2 \cos y^4 \Big|_0^{\sqrt[3]{y^3}} \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y^3 \cos y^4 dy = \frac{1}{8} \sin y^4 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{8} \sin 1}$$



Bedenk: de vgl. van de rechte lijn  $x+y=1$  luidt in poolcoörd.:  $z \cos \varphi + z \sin \varphi = 1$  of wel:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}$

Ga over op poolcoörd.:

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 z * \frac{1}{(z^2)^{3/2}} dz d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left( -\frac{1}{z} \Big|_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi - 1) d\varphi = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$