

1. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -4x^2 + 16x - 7 \geq 0\}$.

Nelms: $-4x^2 + 16x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 112}}{-8} =$

$= \frac{-16 \pm \sqrt{144}}{-8}$. Dus: ("bijvoorbeeld")

$D_f = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-4x^2 + 16x - 7}} * (-8x + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

De invallers f' : $\frac{1}{2\sqrt{-4x^2 + 16x - 7}}$

Dan f heeft in $x = 2$ een (absoluut) maximum
ter plaatse $f(2) = \sqrt{9} = 3$ en in $x = 1$ en $x = 3$
(absolute) local minima ter plaatse $f(1) = f(3) = \sqrt{5}$.

2. a) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+2x} * 2}{\cos(3x) * 3} \stackrel{R.R.}{=} \frac{2}{3}$

Alternatief: $\frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} * \frac{2x}{\sin(3x)} * \frac{2}{3} \rightarrow 1.1. \frac{2}{3}$

als $x \rightarrow 0$ (want dan ook $2x \rightarrow 0$ en $3x \rightarrow 0$).

(ii) $\frac{1}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} * \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} = \frac{-x}{x\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$

$= \frac{-1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} \rightarrow -\frac{1}{2}$ als $x \rightarrow 0$

Alternatief: na het ordnen 1 aan de breuk
dient $f'(x)$ te groeien.

(iii) $(1 - \frac{2}{x})^{5x} = e^{5x \ln(1 - \frac{2}{x})} \rightarrow e^{-10}$ als $x \rightarrow \infty$

want $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x \ln(1 - \frac{2}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \ln(1 - \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 * \frac{2}{x^2} * (-1)}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{1 - 2/x} = -10$.

2 b) $f(x) = x \ln x = e^{\ln x \cdot \ln x}$ en dus

$f'(x) = e^{\ln x \cdot \ln x} * 2 \ln x * \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} * x \ln x$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$

want $x \rightarrow 0$ en $\sin \frac{1}{x}$ beperkt (inbegrensd)

Den $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (Eiken - en rechts limiet beide 0)

Kies dan $f(0) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$;

Maar f continu is.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$

en deze limiet bestaat niet. f is dan niet
diff. Bar in $x = 0$.

4. Bij $f(x) = x^3 - 3 \ln x - 2$ op $(0, \infty)$

dan f continu op $(0, \infty)$ (zelf differentieerbaar!)

dan bij v. $f'(x) = \frac{1}{x^2} + 3 - 2 > 0$

$f'(1) = 1 - 0 - 2 < 0$ $f'(2) = 0 - 3 \ln 2 - 2 > 0$

Vanwege de tussenwaarde stelling van continue functies
heeft f tenminste 2 nulpunten (al tussen $\frac{1}{e}$ en 1,
en tussen 1 en 2).

Dan $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$ is het tekenverloop van f' :

f' : $0 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

f is dus strikt dalend op $(0, 1]$ en strikt stijgend
op $[1, \infty)$ en kan op elke van beide stukken dan
nauwkeurig één nulpunt hebben. Dan totaal
precies 2 nulpunten op $(0, \infty)$.

Altern.: Bij $x = 0$ dan 2 nulpunten heeft f' (Lagrange Regel)

5. (Het pt. $(-1, +1)$ ligt inderdaad op de kromme; (7/11)
 vul maar in). Berekom y als functie van x .

Impliciet differentieer naar x :

$$2 \ln y + 2x * \frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

Vul in: $x = -1$ en $y = 1$; geeft: $-2 \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

Dus $\frac{dy}{dx} = -1/3$ (in $(-1, +1)$) en dus vgl. van de

raaklijn: $y = 1 - \frac{1}{3}(x+1)$ of wel $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

1. a) (i) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{1+x+2\sqrt{x}}{x} dx = \int (\frac{1}{x} + 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx$

$$= \ln|x| + x + 4\sqrt{x} + C$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin t e^{\cos t} dt = -e^{\cos t} \Big|_0^{\pi/2} = e^1 - e^0 = \underline{e-1}$

(event. via de substitutie $u = \cos t$)

b) Bedenk dat $0 < 1 < 3 < \pi$ en dus $\sin x > 0$
 op het interval $[1, 3]$; Dus:

$$2 = \int_1^3 \sqrt{1+0} dx \leq \int_1^3 \sqrt{1+\sin x} dx \leq \int_1^3 \sqrt{2} dx = 2\sqrt{2}$$

c) $\sin(1+t^2)$ is continu; heeft dus een primitieve, zij H
 Dan: $f(x) = \int_0^{e^x} \sin(1+t^2) dt = H(t) \Big|_0^{e^x} = H(e^x) - H(0)$

en dus $f'(x) = H'(e^x) * e^x - 0 = \sin(1+e^{2x}) * e^x$

en dus $f''(x) = \cos(1+e^{2x}) * 2e^{2x} * e^x + \sin(1+e^{2x}) * e^x$

en dus $f'(0) = \underline{\sin 2}$ en $f''(0) = \underline{2\cos 2 + \sin 2}$.

Altern.: noem $e^x = u$ en zij $y = \int \sin(1+t^2) dt$, dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \stackrel{\text{st.}}{=} \sin(1+u^2) * e^x =$$

$$= \sin(1+e^{2x}) * e^x \text{ en verder zoals boven.}$$