

1. (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}}{1} = \frac{2 \sin 0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 0$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$

(Zou ook prima met L'Hôpital kunnen)

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2+e^x} \cdot e^x}{3} = \frac{1}{3}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6+3e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{6}{e^x} + 3} = \frac{1}{3}$

(Kan ook m.b.v. Inzetsstelling)

2. a) $f_{18}(x) = 18 \ln x - x^2$ is continu (zelf diff.) op $(0, \infty)$.

$f'_{18}(x) = \frac{18}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

tekenverloop f'_{18} : $\begin{array}{c} \leftarrow \text{+++++} \text{-----} \rightarrow \\ 0 \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$

$f_{18}(1) = -1 < 0$ $f_{18}(3) = 18 \ln 3 - 9 > 0$

$f_{18}(18) = 18 \ln 18 - 18^2 < 0$

Op grond van de tussenw. Stelling is er dan zeker een nulpunt op $(0, 3)$ en ook een nulpunt op $(3, \infty)$

Daar f_{18} stijgt stijgend op $(0, 3]$ en daalt daalend op $[3, \infty)$ zijn er niet meer nulpunten.

b) Zoek dat $f_c(x) = f'_c(x) = 0$ (m.a.w. zoek dat de functie waarde in het max. plaats 0 is)

Vervolg 2b):

$c \ln x - x^2 = 0 \wedge \frac{c}{x} - 2x = 0$

dan $x = \sqrt{\frac{c}{2}}$ en dan $c \ln \sqrt{\frac{c}{2}} - \frac{c}{2} = 0$

of wel $(c > 0)$: $\ln \frac{c}{2} = 1$ dan $\boxed{c = 2e}$

3. $f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$ dan $\frac{f'(0)}{f''(0)} = \frac{-2}{4}$

$f'(x) = 2x e^{-2x} - 2(x^2 - 2)e^{-2x} = e^{-2x}(-2x^2 + 2x + 4)$ dan $f'(0) = 4$

$f''(x) = (-4x + 2)e^{-2x} - 2(-2x^2 + 2x + 4)e^{-2x}$

Dan 2^e 91. Taylorpolynoom dan $f''(0) = -6$

$P_2(x) = -2 + 4x - 3x^2$

(Zou ook kunnen via een beginstuk van de machthevening antw. van e^{-2x} rond $x=0$)

4. a) $\int_0^t \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \arctan(2x) \Big|_0^t = \frac{1}{2} \arctan(2t)$

$\rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}}$ als $t \rightarrow \infty$. Dan $\int_0^\infty \frac{dx}{1+4x^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

b) $\int_1^e \ln^2 x dx \stackrel{\text{P.i.}}{=} x \ln^2 x - \int x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx$

$= e - \int 2 \ln x dx = e - [2x \ln x - 2x]_1^e$

$= e - 2e + 2e - 2 = \boxed{e - 2}$

4. c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x+1}} \stackrel{\text{Set } t=e^x}{=} \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} =$

(Heuristiken): $\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$

$= \left[\ln|t| - \ln|t+1| \right]_1^e = \ln \frac{e}{e+1} + \ln 2 = \boxed{\ln \frac{2e}{e+1}}$

5. a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x+2)^n$, das diese Reihe

in ein geometrische Reihe mit einem $2x+2$, in der konvergiert ab $|2x+2| < 1$ oder $|x+1| < \frac{1}{2}$ d.h. $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$. Vor der Änderung von x heißt

da auch dann da sein $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(2x+2)} = \boxed{\frac{-1}{2x+1}}$

b) (i) $|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \sim \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ ist

konvergent (p-Reihe mit $p = \frac{3}{2} > 1$) das

$\sum |u_n|$ ist conv., das $\sum u_n$ absolut konvergent

(ii) $|u_n| = \frac{1}{n \ln n} \sim \sum \frac{1}{n \ln n}$ ist divergent

(jedenfalls ist integral-Kriterium zu finden das

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty$, das divergiert offensichtlich)

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$ ist nicht konvergent, aber alternierend in

$\frac{1}{n \ln n} \downarrow 0$ (Leibniz) das mit absolut konvergent

6. (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 12x = 1$ als $x=0$ und $y=1$ (IV)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 2$ als $x=0$ und $y=1$

Querschnitt: $2+1=1$ (x=0) + 2(y=1)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 12x = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=-2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm \sqrt{6}$

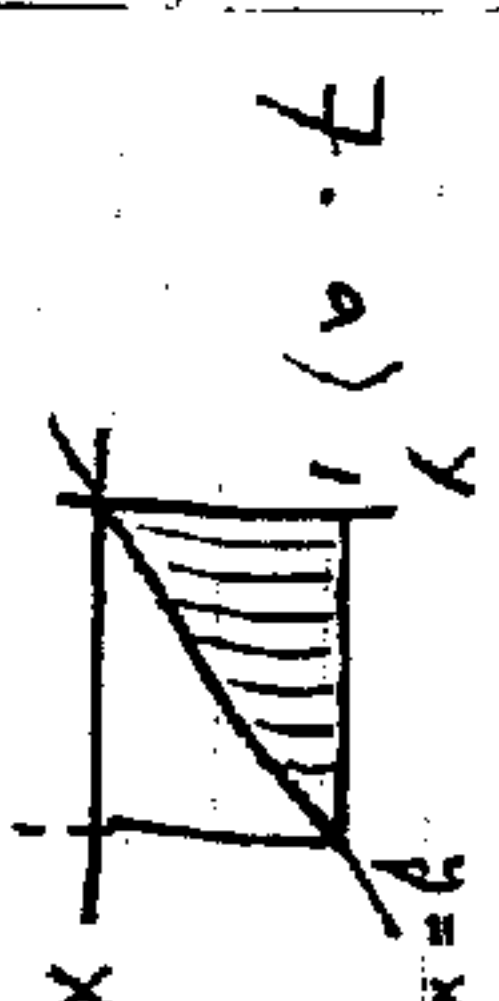
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow y=0 \vee x=-1$

das 4 stat. pt.: $(-1, \pm\sqrt{6}), (0,0)$ und $(-2,0)$

(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 12 = 12(x+1)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x+2 = 2(x+1)$

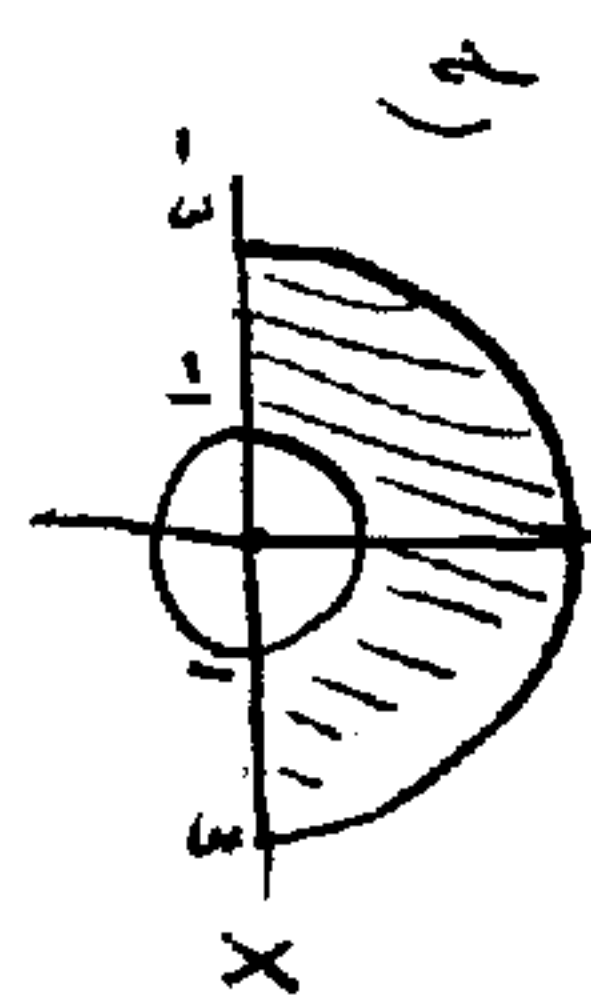
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, das $\Delta = 24(x+1)^2 - 4y^2$

das Nullpt in $(-1, \pm\sqrt{6})$ ein ext. in $(0,0)$ ein min. und max.



Vermutung: integral von 0 bis 1 $\int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt{1-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy$

$= -\frac{1}{3} (1-y^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$



Übersatz von pol. koordinaten

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{26\pi}{3}}$