

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus
Afdeling Wiskunde	Duur: 3 uur
Vrije Universiteit	02-05-2003

1. Bereken:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x}.$$

2. In deze opgave beschouwen we de functie $f_c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die gedefinieerd wordt door $f_c(x) = c \ln x - x^2$. Hierin is c een nader te bepalen positieve reële constante.

- a) We kiezen $c = 18$. Toon aan dat de vergelijking $f_{18}(x) = 0$ precies twee (reële) oplossingen heeft op het interval $(0, \infty)$.
- b) Voor welke $c > 0$ heeft de vergelijking $f_c(x) = 0$ precies één (reële) oplossing?

3. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door:

$$f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}.$$

Bepaal het 2^e graads Taylorpolynoom van f rond $x = 0$.

4. Bereken:

- a) $\int_0^\infty \frac{1}{1 + 4x^2} dx,$
- b) $\int_1^e \ln^2 x \, dx,$ [Aanwijzing: gebruik partiële integratie],
- c) $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx,$ [Aanwijzing: substitueer $t = e^x$].

Z.O.Z.

5. a) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n.$$

Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks convergeert en bereken vervolgens voor die x de som van de reeks.

- b) Ga na of de volgende reeksen convergeren. Vermeld in geval van convergentie of deze absoluut of relatief is.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + 1}$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

6. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2 - 2$.

- (i) Geef de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(x, y, z) = (0, 1, -1)$.
(ii) Bepaal de stationaire punten van f .
(iii) Ga na in welke van de bij (ii) gevonden punten zich een (lokaal) extreem bevindt.

7. a) Bereken door verwisseling van integratievolgorde:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1-y^2} dy dx.$$

- b) Het gebied $S \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ én } y \geq 0 \right\}.$$

Bereken door overgang op poolcoördinaten:

$$\int \int_S \sqrt{x^2 + y^2} dA.$$

Normering:

1 : (i) 3	2 : a) 4	3 : 4	4 : a) 3	5 : a) 3	6 : (i) 3	7 : a) 4
(ii) 3	b) 3		b) 4	b) 5	(ii) 3	b) 4
			c) 4		(iii) 4	
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
6	7	4	11	8	10	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{6} + 1$$