

1. a) A.m.v. Bruchspaltung:

$$\frac{3x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$\text{Dann } 3x+2 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x=0 \text{ in beiden gegl.: } B=2$$

$$x=-1 \text{ in beiden gegl.: } C=-1$$

$$\text{Koeff. von } x^2: 0 = A + C; \text{ da } A=1. \text{ Dann:}$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x+1| \right]_1^2 =$$

$$= \ln 2 - 1 - \ln 3 - \ln 1 + 2 + \ln 2 = \boxed{1 + \ln \frac{4}{3}}$$

$$b) \int_0^\infty \frac{dx}{5+4x+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \frac{dx}{5+4x+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \arctan(x+2) \Big|_0^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\arctan(\alpha+2) - \arctan 2) =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan 2}$$

$$c) \int \cos \sqrt{x} dx \quad \text{Set } t = \sqrt{x} \quad \int 2t \cos t dt \stackrel{\text{P.i.}}{=} 2t \sin t +$$

$$\text{da } dx \leftrightarrow 2t dt$$

$$- \int 2 \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C = \underline{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C}$$

$$2. a) |u_n| = \left| \frac{(-1)^n \sin n}{e^n} \right| \leq \left(\frac{1}{e} \right)^n \quad \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{e} \right)^n \text{ ist eine}$$

convergente geometrische Reihe ($0 < \frac{1}{e} < 1$)

es ist $\sum u_n$ absolut konvergent.

$$2. b) |u_n| = \frac{1}{1+2n+3\ln n} \geq \frac{1}{6n} \text{ da } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{6n} \text{ ist divergent}$$

Dann $\sum u_n$ ist nicht absolut konvergent.

$$\text{Dann } \sum u_n \text{ alternierend u. } |u_n| = \frac{1}{1+2n+3\ln n} \downarrow 0$$

ist $\sum u_n$ relativ konvergent (Leibniz); dann

$\sum u_n$ ist relativ konvergent.

$$c) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} / \frac{n!}{3^n} = \frac{n+1}{3} \rightarrow \infty \text{ als } n \rightarrow \infty$$

da $\sum_{n=0}^\infty u_n$ divergiert (abg. tun fast mit $n \rightarrow \infty$)

$$3. a) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{2n+2} \ln(n+1)}{(n+1)3^{n+1}} / \frac{x^{2n} \ln n}{n3^n} \right| = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{3} \text{ als } n \rightarrow \infty \quad \text{da ab. conv. als } x^2 < 3$$

$$\text{da als } -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3}$$

u. div. als $x^2 > 3$

Dann konvergenzkriterium $R = \sqrt{3}$

$$b) \text{ Als } x = \pm \sqrt{3} \text{ da } x^2 = 3 \text{ u. da da}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{2n} \ln n}{n3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n} ; \text{ da divergent}$$

(wird majorisiert u. kann nicht mehr sein)

$$4. f(x) = x \ln x \quad \text{da } f'(e) = e$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \quad \text{da } f''(e) = 2$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad \text{da } f'''(e) = \frac{1}{e}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{Dann: } T_2(x) = e + 2(x-e) + \frac{1}{2e}(x-e)^2$$

$$\text{es ist } R_2(x) = -\frac{1}{6x^2}(x-e)^3 \text{ von } x=e \text{ bis } x=e.$$

5. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 24y = 24$ als $x=1$ en $y=0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 3y^2 = -24$ als $x=1$ en $y=0$

Vgl. raakvlak: $2 - 0 = 24(x-1) - 24(y-0)$
of wel $\underline{24x - 24y - 2 = 16}$.

b) (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 24y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$ geeft $(0,0)$

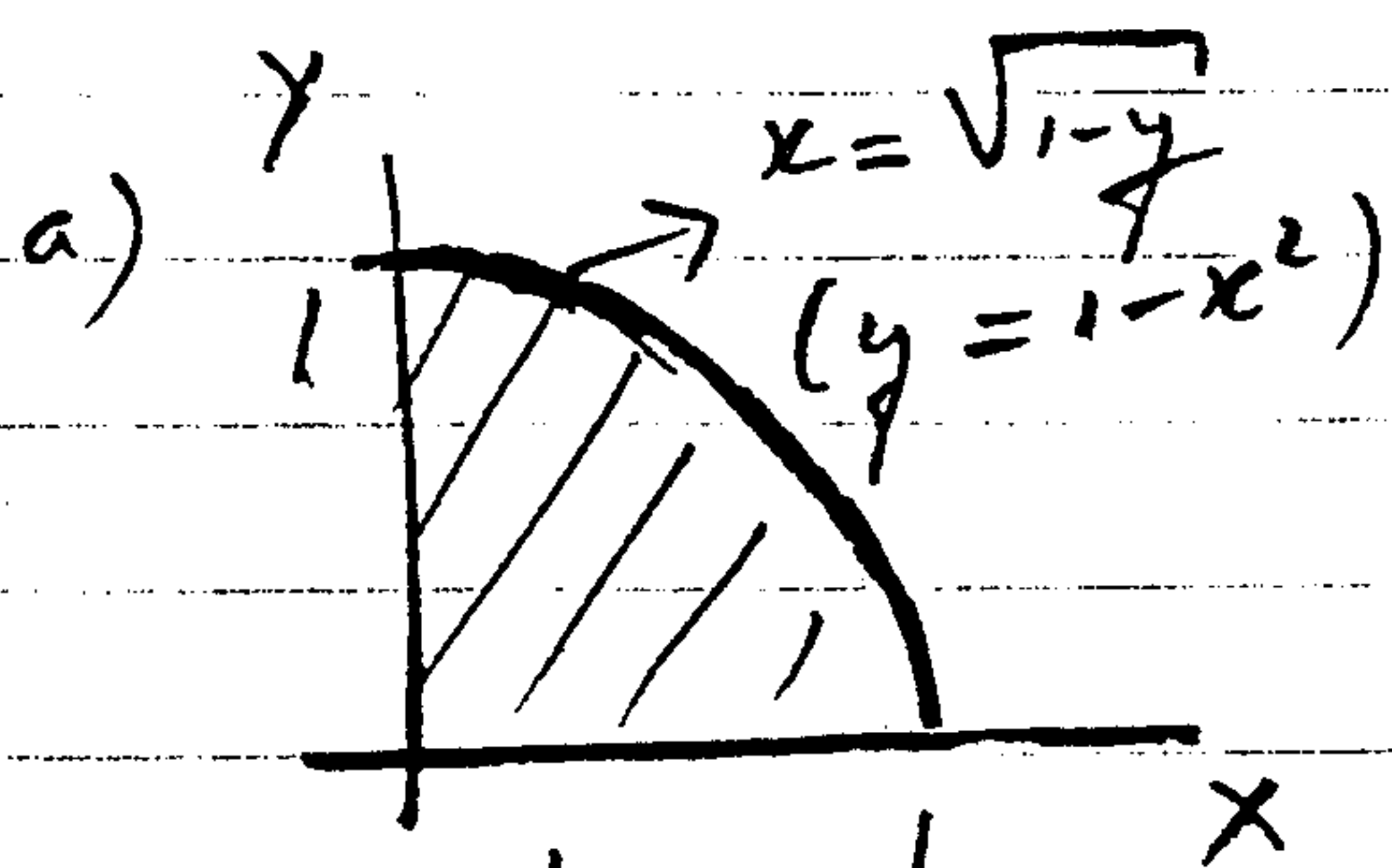
$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 8x$ en $(2,4)$
als stat. punten

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -24$

dan $\Delta(x,y) = 208xy - 576$.

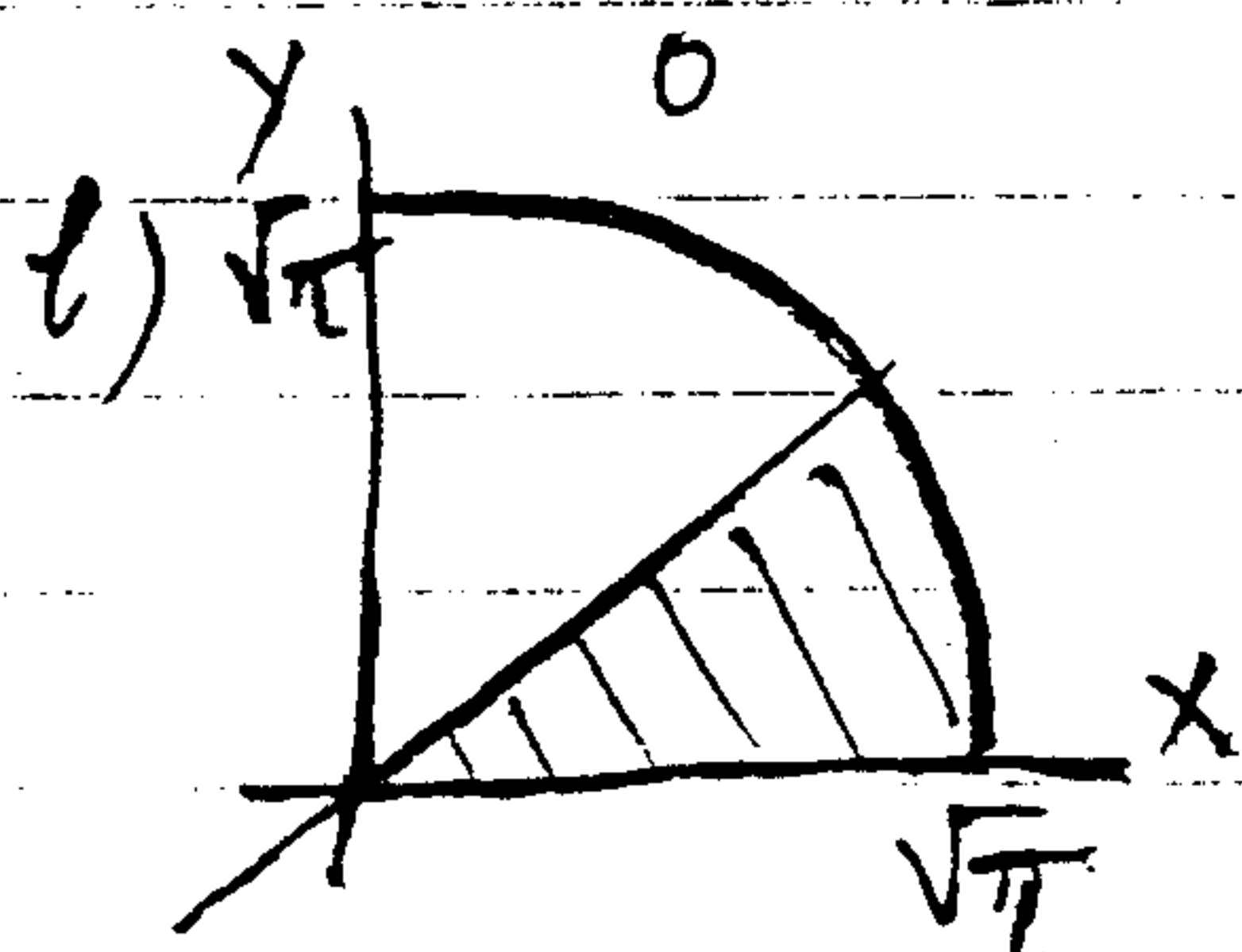
$\Delta(0,0) < 0$ dan in $(0,0)$ sadelpt

$\Delta(2,4) > 0$ dan in $(2,4)$ ext. waarde
(en wel een minimum)



Vervisseling integratie volgorde
geeft:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} e^{3x-x^3} dy \right) dx = \int_0^1 (1-x^2) e^{3x-x^3} dx = \frac{1}{3} e^{3x-x^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e^2 - 1)$$



ga over op poolcoördinaten:

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\pi}} r \sin r^2 dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos r^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{8} (1 - \cos \pi) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$