

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Calculus
Divisie Wiskunde en Informatica	Duur: 3 uur
Vrije Universiteit	05-04-2002

1. a) Bereken:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \arctan 2x}{x \cos 3x} \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sin x} - \sqrt{x} \right).$$

b) Voor $c \geq 0$ is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{c - x} & \text{als } x \leq 0, \\ c \cos x & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f continu is in $x = 0$.

2. De functie $y = y(x)$ wordt impliciet gegeven door

$$(x^2 + y^2)^2 = 50xy.$$

Geef de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $y(x)$ in het punt $(x, y) = (2, 4)$.

3. Bereken:

$$\begin{aligned} a) & \int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx, & [\text{Aanwijzing: substitueer } u = 1 + \sqrt{x}], \\ b) & \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx. \end{aligned}$$

4. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = x^2y - 2xy + y^2$.

- (i) Geef de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(x, y, z) = (1, 2, 2)$.
- (ii) Bepaal de stationaire punten van f .
- (iii) Ga na in welke van de bij (ii) gevonden punten zich een (lokaal) extreem bevindt.

Z.O.Z.

5. Ga na of de volgende reeksen convergeren. Vermeld in geval van convergentie of deze absoluut of relatief is.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{1}{n}}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n^2}{n^2}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

6. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$$

- a) Bepaal de convergentiestraal R van deze machtreeks.
 b) Bepaal het gedrag in de randpunten $x = \pm R$.
 c) Bereken de som van de reeks voor $|x| < R$.
7. a) Bereken door verwisseling van integratievolgorde:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} dx dy.$$

- b) Het gebied $S \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \text{ én } 0 \leq y \leq x \right\}.$$

Bereken door overgang op poolcoördinaten:

$$\int \int_S \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA.$$

Normering:

1 : a) 5	2 : 4	3 : a) 4	4 : (i) 3	5 : 9	6 : a) 3	7 : a) 4
b) 3		b) 4	(ii) 3		b) 2	b) 5
			(iii) 3		c) 2	
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
8	4	8	9	9	7	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{6} + 1$$