

1. a) $\frac{3x^2 - 8x - 2}{x^2 - 2x} = 3 + \frac{-2x - 2}{x(x-2)}$ en

$$\frac{-2x - 2}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + Bx}{x(x-2)}$$

in de tellers invullen $x=0$ resp $x=2$ geeft $A=1$ en $B=-3$.

Dus:

$$\int_3^4 \frac{3x^2 - 8x - 2}{x^2 - 2x} dx = \int_3^4 \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$\left[3x + \ln|x| - 3 \ln|x-2| \right]_3^4 = 3 + \ln \frac{4}{3} - 3 \ln 2.$$

b) $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \stackrel{*}{=} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\arctan(e^x) \right]_0^{\alpha}$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\arctan(e^{\alpha}) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

* : gebruik hierbij zonnodig de substitutie: $e^x = u$.

2. a) $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$ als $n \rightarrow \infty$ dus $\frac{(-1)^n n}{n+1} \not\rightarrow 0$

dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ divergeert; daar de algemene term niet naar 0 gaat.

b) $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{1+n+\sqrt{n}}$ is divergeert. Vergeleijk maar

met de divergente reeks $\sum \frac{1}{n}$:

$$\frac{\frac{1}{1+n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{1+n+\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Daar $|a_n|$ monotoon naar 0 gaat en $\sum a_n$ een alternerende reeks is, is de reeks wel convergent (volgens Leibniz). Daar $\sum |a_n|$ divergeert, is de reeks niet absoluut convergent; dus relatief convergent.

2. c) $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{3} \left(\sqrt[n]{n^3} \right) \rightarrow \frac{1}{3} * 1^3 = \frac{1}{3} < 1$ als $n \rightarrow \infty$
 dan $\sum a_n$ is absoluut convergent.

3. (i) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+2}}{2^{n+1} \sqrt{n+1}} \div \frac{x^{n+1}}{2^n \sqrt{n}} \right| = |x| * \sqrt{\frac{n}{n+1}} * \frac{1}{2} \rightarrow$
 $\frac{1}{2} |x|$ als $n \rightarrow \infty$ dan $\sum a_n$ abs conv. als $|x| < 2$
 en $\sum a_n$ diverg. als $|x| > 2$.

Dus de convergentie-schaal $R = 2$

(ii) $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ is divergent
 (want $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ is ook div)

$x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\sqrt{n}}$ is niet absoluut con-
 vergent (zie bij $x = 2$); wel convergent (volgens Leibniz:
 alternierend en $\frac{2}{\sqrt{n}} \downarrow 0$). Dus relatief convergent.

4. $T_2(x) = f(a) + f'(a) * (x-a) + \frac{f''(a)}{2} * (x-a)^2$.

Waar: $f(a) = \frac{\pi}{2} * \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
 $f'(x) = \sin x + x \cos x \quad x = \pi/2$

Dus: $f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x \quad x = \pi/2 = -\pi/2$

$T_2(x) = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4} (x - \frac{\pi}{2})^2$.

5. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 3y + 3 = 6 - 3 + 3 = 6$ als $x = y = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 2y - 3 = -3 + 2 - 3 = -4$ als $x = y = 1$

Nervol 5 a):

(III)

Dus de vergelijking van het raakvlak luidt:

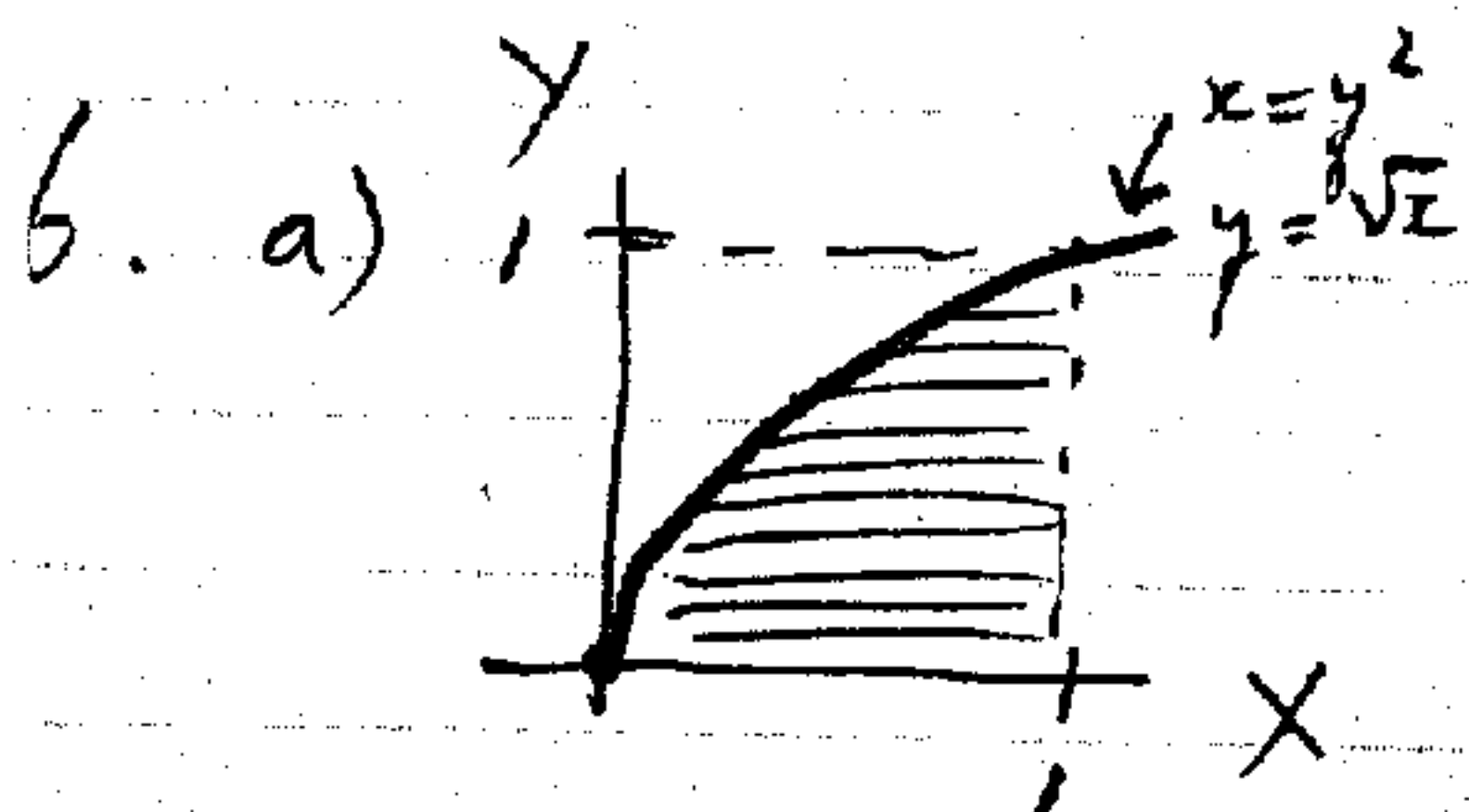
$$z = 3 + 6(x-1) - 4(y-1) = \underline{6x - 4y + 1}.$$

$$5. b) (i) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ geeft } y = 2x^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ geeft } 2y = 3x + 3 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{invullen geeft} \\ x = 1 \text{ en dus } y = 3 \\ \text{en } x = -1/4 \text{ en dus } y = 9/8 \end{array} \right\}$$

Dus 2 stat. pt's: $(1, 3)$ en $(-1/4, 9/8)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3. \quad \text{Dus}$$

$$\Delta = 24x - 9 = \begin{cases} > 0 & \text{in } (1, 3) \text{ dus daar een lok. extr. en wel min.} \\ < 0 & \text{in } (-1/4, 9/8) \text{ dus daar een Sadelpunt} \end{cases}$$



Vermiseling van integratievolgorde levert:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x} e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(e-1)}$$

b) Merk dat S een kegel is met top in $(0, 0, \pi)$ en (in vlak $z=0$) de grondcirkel: $x^2 + y^2 = \pi^2$

Overgang op cilindercoördinaten levert:

$$\int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-z} r \cos z \, dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-z} r \sin z \Big|_{z=0}^{z=\pi-z} dz \right) d\theta = 2\pi \times \int_0^\pi r \sin(\pi-z) dr \stackrel{\text{P.i.}}{=} 0 = 2\pi \left[r \cos(\pi-z) + \sin(\pi-z) \right]_0^\pi = 2\pi^2$$