Uitwerking 1e deeltentamen (D1) Calculus 25/10/2001

1. a) (i) Vanwege de absolunt-strepen bekijken we linker- en rechterlimiet apart:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1} \overset{R.R.}{=} \frac{1}{2}$$, terwijl

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x+1} \overset{R.R.}{=} -\frac{1}{2}$$; dus

de gevraagde limiet bestaat niet (verschillende rechter- en linkerlimiet)

(ii) $$\frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x\cos x} = \frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x\cos x} * \frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{1+\sin x}} =$$

$$= -\frac{\sin x}{x\cos x} * \frac{1}{1+\sqrt{1+\sin x}} = -\frac{\sin x}{x} * \frac{1}{\cos x} * \frac{1}{1+\sqrt{1+\sin x}} \xrightarrow{R.R.}$$

$$\xrightarrow{R.R.} -1 * \frac{1}{1} * \frac{1}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$ als $x\to 0$.

b) (i) Voor continuiteit in 0 moet gelden: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = c$.

Welnu:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} * \sin x * \frac{1}{1+\cos x} \xrightarrow{R.R.} 1 * 0 * \frac{1}{1+1} = 0$$ als $x\to 0$.

Men moet c dus gelijk aan 0 kiezen.

(ii) $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{c=0}{=} \frac{f(x)}{x} = (\text{zie bij (i)}) = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 * \frac{1}{1+\cos x} \xrightarrow{R.R.} 1^2 * \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ als $x\to 0$.

Dus met $c=0$ is f ook diff. baar in $x=0$ met $\underline{f'(0) = \frac{1}{2}}$

2. Impliciet differentiëren levert:

$$2x - 3y - 3x\frac{dy}{dx} + 4y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$ Vul in: $x=2, y=1$

$$4 - 3 - 6\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = 0$$; dus in $(2,1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

en dus luidt de vgl. v/d raaklijn:

$(y-1) = \frac{1}{2}(x-2)$ of wel $\underline{2y = x}$.

3. a) Zij f continu op $[a,b]$ en s een reëel getal tussen $f(a)$ en $f(b)$. Dan bestaat een $c \in (a,b)$: $f(c) = s$.

b) Zij f diff.baar op (a,b) en continu op $[a,b]$. Dan bestaat een $c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4: Voer in de functie $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}$ voor $x \geq 0$.
Dan f continu op $[0,\to)$ en diff.baar op $(0,\to)$ met $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - 1) > 0$ voor elke $x > 0$. Dus f is stijgend op $[0,\to)$ en daar $f(0)=0$ geldt $f(x) > 0$ voor elke $x > 0$.

Dus: $e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x} > 0$ voor elke $x > 0$.

Dus: $e^{\sqrt{x}} > 1 + \sqrt{x}$ voor elke $x > 0$.

5. a) (i) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \underset{\frac{dt}{dx} = e^x}{\overset{\text{Stel } t = 1+e^x}{=\!=}} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt =$

$$= \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - 2t^{1/2} + C = \underline{\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} - 2\sqrt{1+e^x} + C}$$

(ii) $$\int_0^1 \frac{x + \arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\arctan^2 x\Big]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi^2}{32}}.$$

b) Voor $x > 0$ geldt (stel $x^2 = u$) als $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = e^{\sqrt{u}} \cos(\pi\sqrt{u}) * 2x =$$

$$e^x \cos(\pi x) * 2x \underset{}{\overset{x=2}{=\!=}} e^2 \cos(2\pi) * 4 =$$

$$= e^2 * 1 * 4 = \underline{4e^2}$$

6. Scheiding van variabelen geeft:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (3x^2 - 1)\, dx \quad \text{of wel}$$

$$-\frac{1}{y} = x^3 - x + C.$$ Invullen $y(0) = 1$ geeft:

$$-\frac{1}{1} = 0 - 0 + C \quad \text{dus} \quad C = -1$$

dus gevraagde oplossing:

$$-\frac{1}{y} = x^3 - x - 1 \quad \text{of wel:}$$

$$\underline{y = \frac{1}{1 + x - x^3}}$$