

1. a) $I_\alpha = \int_{\alpha}^1 \sqrt{x} \ln x \, dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x \Big|_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$
 $0 < \alpha < 1$
 $= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \Big|_{\alpha}^1 = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3} \alpha^{3/2} \ln \alpha + \frac{4}{9} \alpha^{3/2}$
 $\rightarrow \boxed{-\frac{4}{9}}$ als $\alpha \rightarrow 0^+$.

b) Eerst breuksplitsen:

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Ans: $A+C=0$ $A+B=2$ $B=1$

Ans: $A=B=1$ en $C=-1$

Ans:

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{1}{x^2} \, dx - \int \frac{1}{x+1} \, dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| + C.$$

2. a) $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \rightarrow 1$ als $n \rightarrow \infty$;

das alg. term v/d reeks gaat niet naar 0.
 De reeks is dus divergent.

b) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n$
 $\rightarrow \frac{1}{e} < 1$ als $n \rightarrow \infty$ dus absoluut conv.

c) $|a_n| = \frac{n}{1+n^2} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$ en $\sum \frac{1}{2n}$ is div.

Dus $\sum a_n$ is in elk geval niet absol. conv.

Vervolg:

(II)

De reeks is alternierend; $\frac{n}{1+n^2} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$

en $\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{\frac{1}{n} + n}$ is monotoon dalend

Dus (volgens Leibniz): de reeks $\sum a_n$ convergeert

Dus: $\sum a_n$ is relatief convergeert.

$$3. a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4/3}{1 - 2/3} = 4$$

want het is een meetkundige reeks met toden $\frac{2}{3}$

en eerste term $4/3$.

$$b) \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{3^{n+2} \cdot x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^{n+1} \cdot x^n} \right| = 3 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3|x|$$

$$< 1 \text{ of } |x| < \frac{1}{3} \text{ en } > 1 \text{ of } |x| > \frac{1}{3}$$

dus conv. straal $R = \frac{1}{3}$.

(ii) $x = R$: $\sum \frac{3}{n}$ is divergent (vgl. harm. reeks)

$x = -R$: $\sum (-1)^n \frac{3}{n}$ is alternierende reeks die aan alle voorwaarden van 'Leibniz' voldoet; dus convergeert (en wel relatief)

$$4. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\text{dus } (1+x) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x - \frac{x^3}{2!} + \dots$$

$$\text{Dus } T_3(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$$

(Men kan dit ook bepalen door herhaald diff² van f)

5. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 2x = -2$ als $x=2$ en $y=1$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 4y = 4$ als $x=2$ en $y=1$

vergelijking raakt vlak heeft dan:

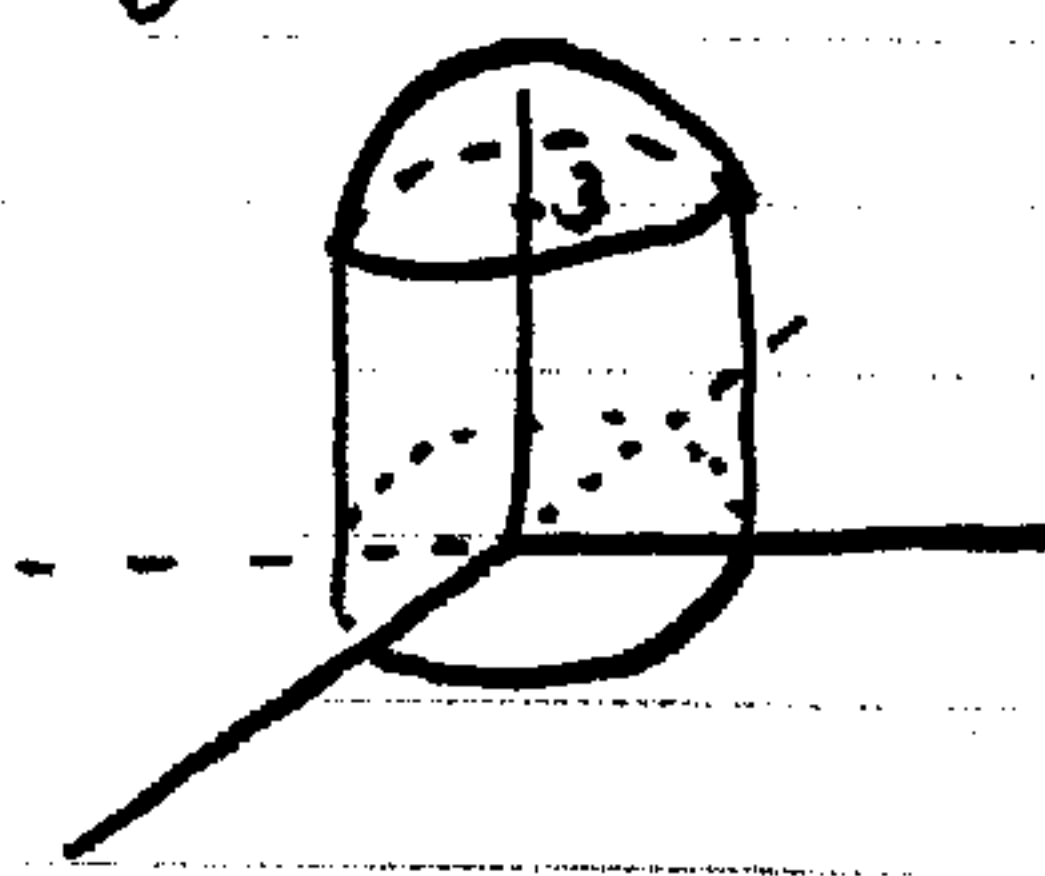
$$2 = -1 + -2(x-2) + 4(y-1) = \underline{-2x + 4y - 1}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = y^2$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow xy = y$ } geeft als stat. punten:
 $(1,1), (1,-1)$ en $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x - 4 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y.$$

$$\Delta = -8x + 8 - 16y^2 = \begin{cases} 8 \text{ in } (0,0) \text{ dan extr.} \\ \text{(en wel een max.)} \\ -16 \text{ in } (1, \pm 1) \text{ dan daar} \\ \text{een zadelpt.} \end{cases}$$

6. a) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \cos(x^2) dx \right) dy \xrightarrow[\text{volgord.}]{\text{verwiss.}} \int_0^1 \left(\int_0^1 \cos(x^2) dy \right) dx =$
 $= \int_0^1 x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) \Big|_0^1 = \underline{\frac{1}{2} \sin 1}$

b)  Ga over op cilindercoörd.:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^4 r \sqrt{r^2} dz dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (4 - z^2) dz d\theta = 2\pi * \left(\frac{4}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{34}{15} \pi}$$