

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen
Tentamen Calculus 1 voor BWI 10 januari 2010, 18:30-21:15

Tentamencijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef niet alleen antwoorden, maar ook de berekeningen.

Veel succes!

Opgave 1. (10 punten)

We bekijken de functie $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ die wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^{x^2}}.$$

Bepaal de globale extrema van f op $[0, 3]$.

Opgave 2. (12 = 6 + 6 punten)

Bereken de volgende limieten:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}}{x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

Opgave 3. (8 punten)

Bepaal $P_3(x)$, het derde orde Taylor-polynoom van de functie

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

rond $x = 3$.

Opgave 4. (6 punten)

Bepaal alle complexe oplossingen z van de vergelijking

$$z^2 + 6z + 2iz + 33 + 6i = 0.$$

Opgave 5. (6 punten)

Van een complex getal z zijn de modulus en de hoofdwaaarde van het argument gegeven door $|z| = 2$ respectievelijk $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{7}$.

Druk $\frac{\bar{z}}{z^3}$ uit in de vorm $re^{i\varphi}$, met $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ en $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Z.O.Z.

Opgave 6. (8 punten)

Voor welk reëel getal a is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^5}\right) + 42 & \text{als } x \neq 0 \\ a & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

continu in $x = 0$?

Opgave 7. (7 punten)

De functie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x^3}{\tan(x)} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

Ga met behulp van de definitie van differentieerbaarheid na dat f differentieerbaar is in $x = 0$ en bepaal $f'(0)$.

Opgave 8. (11 punten)

Bewijs met behulp van volledige inductie naar $n \in \mathbb{N}$ dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{2n+3}{3^n} \right).$$

Opgave 9. (8 punten)

Bepaal een vergelijking van de raaklijn in $(1, 1)$ aan de kromme gegeven door

$$x^2 y^4 + x^4 y^2 = 2.$$

Opgave 10. (8 punten)

Bereken

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt.$$

Opgave 11. (6 punten)

Bepaal

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(x^3)}{1+x^2} dx.$$

Motiveer je antwoord kort.