

Tentamen Bedrijfseconometrie deel 1
22 oktober 2007, 12.00-14.00

Opgave 1

Gegeven is het Lineaire Programmeringsprobleem (1)

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{Onder} & 6x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1a Gegeven is dat de optimale basis bestaat uit x_1 en x_2 . Bepaal de optimale duale variabelen (hiervoor is het niet nodig simplex stappen uit te voeren).

Antwoord (12 punten)

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$y = c_B^T B^{-1} = (1 \ 1) \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/18 & 2/9 \end{bmatrix}$$

1b In vraag 1a is aangegeven dat de optimale basis van probleem (1) bestaat uit x_1 en x_2 .

Beschouw nu probleem (2) dat gelijk is aan probleem (1) behalve dat de rechterkant van de eerste restricties verandert van 12 in 10 en de rechterkant van de tweede restrictie verandert van 12 in 6.

Op welke wijze is aan te tonen dat de basis bestaande uit x_1 en x_2 nog altijd optimaal is?

Antwoord (12 punten)

De basisoplossing horend bij de basis bestaande uit x_1 en x_2 is optimaal voor probleem (1) en is dus primaal en dual toegelaten.

Duale toegelatenheid is onafhankelijk van de rechterkant van de restricties (b komt niet voor in de formule van de gereduceerde kosten).

De basisoplossing horend bij de basis bestaande uit x_1 en x_2 is dus ook dual toegelaten voor probleem (2). Om aan te tonen dat de basis bestaande uit x_1 en x_2 nog altijd optimaal is, volstaat het dus om aan te tonen dat deze basis primaal toegelaten is. Ofwel:

$$x = B^{-1}b \geq 0$$

Voor probleem (2) is dat het geval, want

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/9 \\ 1/3 \end{bmatrix} \geq 0$$

Opgave 2

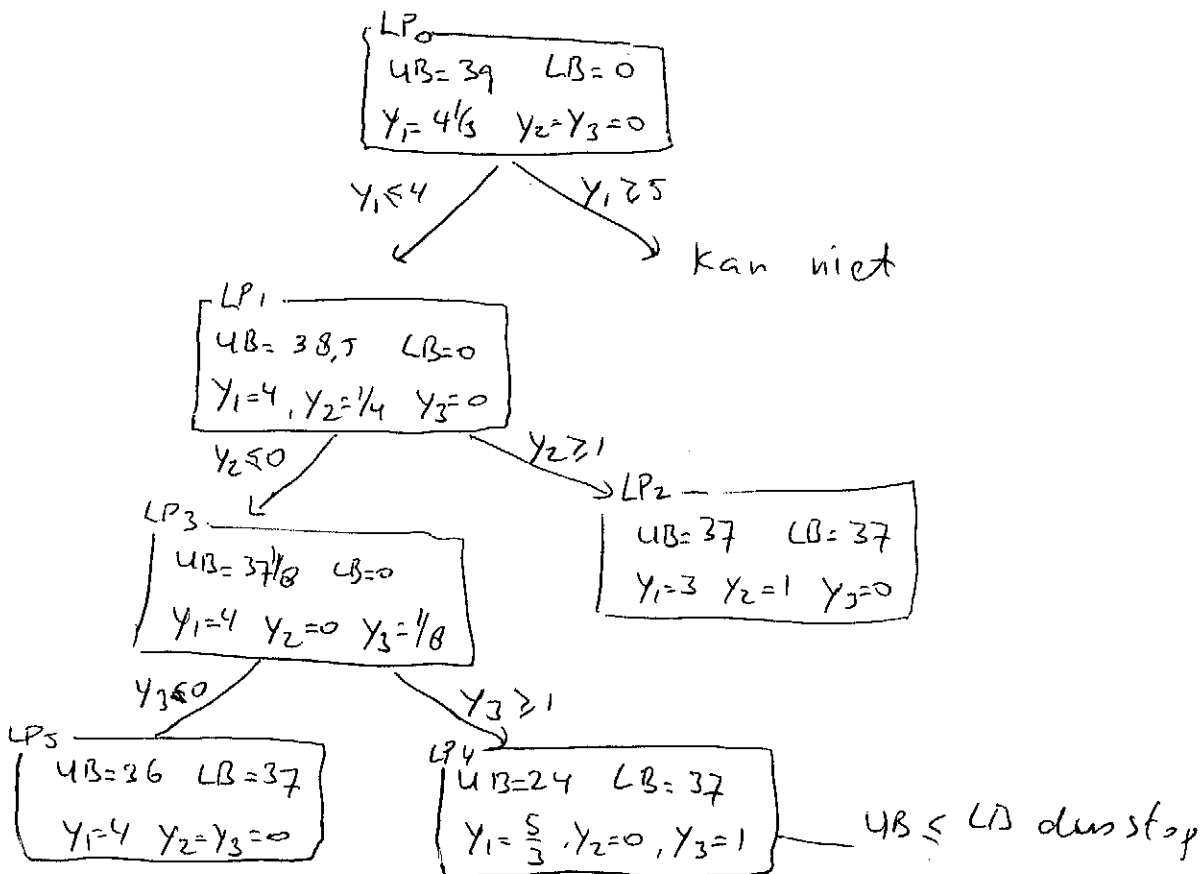
Bereken met het Branch-en-Bound algoritme een optimale oplossing voor het volgende geheeltallige probleem.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 9x_1 + 10x_2 + 9x_3 \\ \text{Onder} & 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ en geheel} \end{array}$$

Begin de berekening met de ondergrens $LB = 0$.

Antwoord (20 punten)

De oplossing van de LP relaxatie van het genoemde probleem is te bepalen zonder de simplex methode toe te passen. De variabelen moeten een zo groot mogelijke waarde worden gegeven in volgorde van hun doelstellingscoëfficiënt gedeeld door de coëfficiënt in de restrictie. Het is eenvoudiger de variabelen x te vervangen door variabelen y met $y_1 = x_3$, $y_2 = x_2$ en $y_3 = x_1$. Dan geldt namelijk dat de eerste variabele steeds het aantrekkelijkst is.



De oplossing is dus $x_1 (= y_3) = 3$ en $x_2 (= y_2) = 1$ en $x_3 (= y_1) = 0$

Opgave 3

3a

Beschouw het volgende geheeltallig programmeringsprobleem.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{Onder} & 6x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ en geheel}\end{array}$$

Oplossing van de LP relaxatie van bovenstaand probleem leidt tot de basis x_1 en x_2 met de waarden $4/3$ en 2 en

$$B^{-1} \text{ is } \begin{array}{cc} 2/9 & -1/9 \\ -1/6 & 1/3 \end{array}$$

Vindt een snede (valid inequality) met de methode van Gomory.

Antwoord (12 punten)

$$Ax = b \rightarrow Bx_B + Rx_R = b \rightarrow x_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

Dus eindtableau simplex methode geeft

$$x_1 + \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4 = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow x_1 + \frac{2}{9}x_3 - x_4 + \frac{8}{9}x_4 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x_1 - x_4 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_4$$

$$\rightarrow x_1 - x_4 - 1 \leq 0$$

substitutie van $x_4 = 12 - 3x_1 - 4x_2$ geeft

$$x_1 - 12 + 3x_1 + 4x_2 - 1 \leq 0$$

$$\rightarrow 4x_1 + 4x_2 \leq 13$$

3b

Gegeven is het geheeltallig programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 2x_1 + 6x_2 + x_3 \\ \text{Onder} & 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ & \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ en geheel} \end{array}\end{array}$$

Bovenstaand probleem is op te lossen door gebruik te maken van Lagrange Relaxatie, waarbij de eerste of de tweede restrictie gerelaxeerd zou kunnen worden. Geef aan welke van beide restricties het beste kan worden gerelaxeerd en welke argumenten een rol spelen bij uw keuze.

Antwoord (12 punten)

Normaal gesproken is het aantrekkelijk om de 'lastigste' restrictie te relaxeren zodat een zo eenvoudig mogelijk probleem resteert. Dat zou in dit geval betekenen dat de eerste restrictie gerelaxeerd moet worden.

Echter het resterende gerelaxeerde probleem moet ook weer niet zo eenvoudig zijn dat de geheeltalligheid overbodig wordt (dan is de oplossing van het gerelaxeerde probleem namelijk niet beter dan de LP relaxatie van het oorspronkelijke probleem). Als we in dit geval de eerste restrictie relaxeren is het resulterende probleem triviaal en doet de geheeltalligheid er niet meer toe (van de variabelen x_1 en x_3 krijgt dan diegene de waarde 1 waarvan de coefficient in de (gerelaxeerde) doelstellingsfunctie het grootst is).

In dit geval moet dus de tweede restrictie worden gerelateerd omdat het gerelaxeerde probleem anders te makkelijk (en daarmee niet meer waardevol) is.

Opgave 4

4a

De netwerk simplex methode kan gebruikt worden voor bepaalde problemen die op een netwerk zijn gedefinieerd. In de netwerk simplex methode corresponderen opspannende bomen van het netwerk met bases van het (gereduceerde) bijhorende Lineaire Programmeringsprobleem.

Start van de primale simplex methode is een toegelaten basisoplossing. Analooeg begint de netwerk simplex methode met een toegelaten opspannende boom oplossing. De oplossing horende bij een willekeurige opspannende boom kan echter ook negatieve stromen hebben (en dus niet toegelaten zijn). In zijn algemeenheid kan het lastig zijn om bij een gegeven netwerk een toegelaten beginoplossing te vinden (d.w.z. een opspannende boom met uitsluitend niet-negatieve stromen).

Op welke wijze is het mogelijk om altijd een toegelaten beginoplossing te vinden?

Antwoord (11 punten)

Door een dummy knoop toe te voegen met vraag/aanbod 0. Deze dummy knoop wordt verbonden met alle andere knopen door dummy takken. De kosten van alle dummy takken zijn hoog en de richting van de tak is van dummy naar echte knoop als de knoop een vraagpunt is en van echte knoop naar dummy knoop als de echte knoop een aanbodpunt is. Als vraag/aanbod van de echte knoop 0 is, doet de richting van de tak er niet toe.

Voor dit uitgebreide netwerk is er een triviale toegelaten beginoplossing. We beginnen met als opspannende boom de verzameling van dummy takken.

(Uitgaande van deze startoplossing zal de netwerk simplex methode ooit het optimum vinden van het werkelijke probleem. De dummy takken zullen hierbij niet worden gebruikt omdat ze heel hoge kosten hebben).

4b

Voor het vinden van een (lokaal) minimum van een (tweemaal continu differentieerbare) functie kunnen zoekmethoden worden gebruikt die zijn gebaseerd op het herhaald uitvoeren van de stap:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

Hierin is het punt $x_k \in \mathbb{R}^n$ de k-de poging (schatting of benadering van het minimum), $p_k \in \mathbb{R}^n$ de zoekrichting naar het volgende punt en $\alpha_k \in \mathbb{R}$ een scalair die zorgt voor de stapgrootte tot het volgende punt.

Beschrijf de essentie van een methode waarmee de scalair α_k kan worden bepaald.

Antwoord (11 punten)

De methode bestaat uit twee delen.

Stap 1: Er wordt een interval bepaald waarin het minimum zich bevindt. Dat is: er worden drie punten gezocht met als eigenschap dat de middelste van de drie de laagste functiewaarde heeft.

Stap 2: Het interval wordt iteratief verkleint, totdat het zo klein is dat het minimum met voldoende nauwkeurigheid is gevonden.

Stap 1. kan worden uitgevoerd door met twee willekeurige punten te beginnen. Er wordt dan een derde punt gekozen aan de kant van het tweetal dat de laagste functiewaarde heeft. Als het derde punt een hogere functiewaarde heeft dan de middelste heb je de drie punten. Anders wordt een nieuwe derde punt gezocht verder weg van het middelste aan de kant waar ook het derde punt lag. Etc.

Stap 2. Bijv. door m.b.v. kwadratische interpolatie van de drie punten een nieuw punt te vinden in het interval en dan het interval te verkleinen.