

Opgelet

- (1) Bij dit tentamen mag geen gebruik worden gemaakt van een rekenmachine, formuleblad, of enig ander hulpmiddel.
- (2) Dit tentamen heeft 18 opgaven en bestaat uit twee gedeelten. Gebruik aparte vel(len) voor het gedeelte Basisbegrippen (14 t/m 18).

Basiswiskunde

- 1 Gebruik de binomiumwet van Newton om $(2x - 1)^5$ uit te rekenen.
- 2 Bereken $\sum_{k=3}^{10} (5 - 3k)$.
- 3 Bereken exact $\sin(\frac{3}{8}\pi)$.
- 4 Differentieer $f(x) = \frac{1}{e^x} + \sin^2(3x)$.
- 5 Los op $\arcsin^2 x + \frac{\pi}{2} \arcsin x = 0$.
- 6 Los op $x - 6\sqrt{x} = 27$ (met x reëel).
- 7 Van een complex getal z is gegeven dat $|z| = 4$ en dat de cosinus van het argument $\frac{1}{2}$ is. Welke complexe getallen z voldoen hieraan?
- 8 Bereken z^5 als $z = 1 - i\sqrt{3}$ (antwoord in de vorm $a + bi$).
- 9 Los de vergelijking $z^2 + 5z + 7 = 0$ op met behulp van kwadraatafsplitsing (antwoord in de vorm $z = a + bi$).
- 10 Los op in de vorm $z = a + bi$ de vergelijking $iz^3 = 8$.
- 11 Los op in de vorm $z = a + bi$ de vergelijking $z^2 = 3 + 4i$.
- 12 Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k - 5) = 2n$ voor elk natuurlijk getal n .
- 13 Bewijs met volledige inductie dat het getal $3 \cdot 7^n - 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

Basisbegrippen

- 14 Leid de bekende a-b-c formule af voor de oplossingen van de vierkantsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

door middel van kwadraat afsplitsen.

- 15 We kiezen de verzameling van de niet-negatieve gehele getallen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ als ons universum. Laat $\mathbb{P}$ de verzameling zijn van alle priemgetallen, en $\mathbb{E}$ de verzameling van alle even getallen. We beschouwen de volgende drie beweringen.

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in \mathbb{P} : p < q,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}_0 \exists m \in \mathbb{N}_0 : n = k^2 + m^2,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} : p > n \wedge p + 2 \in \mathbb{P}.$$

- (a) Beschrijf deze beweringen kort en bondig in correct Nederlands.
- (b) Bewijs of weerleg de tweede bewering.
- (c) Formuleer in wiskundige taal het vermoeden van Goldbach: "Elk even getal groter of gelijk aan 4 is gelijk aan de som van twee priemgetallen."
- (d) Formuleer in wiskundige taal het vermoeden van Nobel: "Bij elk oneven natuurlijk getal kun je een priemgetal vinden, zó dat de som van beide getallen een macht van 2 is."

16 Er komen 10 echtparen aan in een restaurant. Er zijn nog precies 5 tafels beschikbaar met elk vier stoelen. Eerst kiest elk echtpaar een tafel, en vervolgens neemt iedereen plaats op één van de vier stoelen van de gekozen tafel. De echtparen zitten dus altijd bij elkaar aan tafel.

- (a) Beschrijf de verzameling van alle mogelijke uitkomsten Ω voor dit 'experiment', als de tafels en de stoelen genummerd zijn. Wat is het *aantal* verschillende uitkomsten?
- (b) Idem, maar nu voor het geval de stoelen ongenummerd zijn? De tafels blijven genummerd.
- (c) Idem, maar nu voor het geval dat zowel de stoelen als de tafels ongenummerd zijn. Het gaat er nu dus alleen om welke echtparen bij elkaar aan tafel zitten.

17 Laat A , B en C deelverzamelingen van N . Bewijs of weerleg de volgende beweringen.

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C),$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

18 Laat $f : V \longrightarrow W$ een functie zijn van een verzameling V naar een verzameling W . Zij gegeven $A \subset V$, $B \subset V$.

- (a) Geef de definities van ' f is injectief', ' f is surjectief' en ' f is bijjectief'.
- (b) Laat f injectief zijn. Toon aan

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B].$$

Geef precies aan waar je de injectiviteit van f gebruikt. Geef een tegenvoorbeeld in geval f niet injectief is.

Normering:

Basiswiskunde:	Som	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaal
	Punten	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	30

Basisbegrippen:	Som	14	15a	15b	15c	15d	16a	16b	16c	17	18a	18b	Totaal
	Punten	3	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	15

Cijfer= aantal punten / 5 + 1.