

Tentamen Basiswiskunde II voor AI

25 mei 2009

Docent: Tilman Bauer

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) In het eerste deel is het belangrijk om precies en correct te formuleren. Laat alle rekeningen die je maakt zien. Succes!

KENNISVRAGEN

Opgave 1 (3 punten). Wanneer heet een deelverzameling $X \subseteq \mathbb{R}^n$ een lineaire deelruimte?

Opgave 2 (3 punten). Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wat zegt de dimensieformule, d.w.z. welke relatie bestaat tussen m , n , $\dim \ker A$ en $\dim \operatorname{im} A$?

Opgave 3 (3 punten). Wat is de definitie van een eigenwaarde van een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Opgave 4 (2 punten). Wanneer heet een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulier?

Opgave 5 (3 punten). Wat is de definitie van de partiële afgeleiden van een functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?

Opgave 6 (4 punten). Zij $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$, $b \in \mathbb{R}^5$. Hoeveel oplossingen heeft het stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$ in het typisch geval? Welke andere (ontypische) mogelijkheden bestaan ook? Geef een voorbeeld van een stelsel met een ontypisch aantal oplossingen.

REKENOPGAVEN

Opgave 7 (3 punten). Bereken de producten AB en BA voor de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 8 (4 punten). Bepaal de oplossingsverzameling van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrcr} 3x & -2y & +z & = 5 \\ -x & & +2z & = 3 \end{array}$$

Tentamen Basiswiskunde II voor AI

25 mei 2009

Docent: Tilman Bauer

Opgave 9 (6 punten). Een populatie van een diersoort wordt benaderd door het aantal jonge dieren $M(t)$ en het aantal oude dieren $N(t)$ op het tijdpunt t en de regels:

$$M(t+1) = \frac{1}{2}M(t) + 2N(t) \quad \text{en} \quad N(t+1) = \frac{3}{4}M(t).$$

Bepaal $M(t)$ en $N(t)$ als $M(0) = N(0) = 1$.

Opgave 10 (3 punten). Bereken de determinant van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Opgave 11 (4 punten). Bepaal een basis van de deelruimte, die opgespannd wordt door

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ligt de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in deze deelruimte? (Leg je antwoord uit, ja/nee is niet genoeg)

Opgave 12 (3 punten). Bepaal de cosinus van de hoek tussen

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad y = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Opgave 13 (5 punten). Vind de beste benadering (x, y) tot een oplossing van

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 0 \\ x - y &= 5. \end{aligned}$$

Opgave 14 (3 punten). Bepaal de gradient van de functie $f(x, y, z) = \frac{xz}{y+z}$.

Opgave 15 (6 punten). Bepaal alle kritische punten, lokale maxima en minima van de volgende functie:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$