

1. Gegeven is de volgende functie:

$$g(x) = \arccos x .$$

- a. Geef de formule van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $x = 0$.

$$g(0) = \frac{\pi}{2} \quad g'(0) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0} = -1 .$$

Raaklijn l aan de grafiek van g in het punt $x = 0$ wordt gegeven door:

$$l(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

We geven ook de functie

$$f(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{3}x}$$

We kunnen de functie f zien als som van een meetkundige reeks.

- b. Noteer deze meetkundige reeks en geef aan voor welke waarden van x de reeks convergeert. Schrijf de eerste drie termen van de reeks uit.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right)^{n-1} = 2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \dots$$

Deze reeks convergeert voor $-3 < x < 3$.

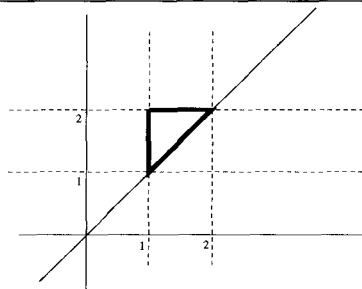
- c. Bereken de derde orde Taylorbenadering van f in het punt $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{-1} & f(0) &= 2 \\ f'(x) &= -\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{-2} & f'(0) &= -\frac{2}{3} \\ f''(x) &= \frac{4}{9}\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{-3} & f''(0) &= \frac{4}{9} \\ f'''(x) &= -\frac{4}{9}\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{-4} & f'''(0) &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

4. Gegeven is de volgende herhaalde integraal:

$$\int_1^2 \left(\int_1^y \frac{6y}{x^3 - 12x} dx \right) dy .$$

a. Schets het integratiegebied en geef de nieuwe grenzen die nodig zijn om de integratievolgorde te verwisselen.



Genzen: $1 \leq x \leq 2$ en $x \leq y \leq 2$.

b. Verwissel de integratievolgorde en bereken de herhaalde integraal.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{6y}{x^3 - 12x} dy \right) dx &= \int_1^2 \left(\frac{3y^2}{x^3 - 12x} \Big|_x^2 \right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{12 - 3x^2}{x^3 - 12x} \right) dx \\ &= \left[-\ln |x^3 - 12x| \right]_1^2 = -\ln 16 + \ln 11 . \end{aligned}$$

6. Bekijk de volgende recurrente betrekking

$$a_n - a_{n-1} - 12a_{n-2} = 4^n + 2^n .$$

a. Laat zien dat de homogene oplossing de volgende vorm heeft:

$$a_n^h = C4^n + D(-3)^n \quad C, D \in \mathbb{R}$$

We hoeven hier eigenlijk alleen de oplossingen van de karakteristieke vergelijking te berekenen:

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \vee \lambda = 4 .$$

b. Geef aan welke vorm de particuliere oplossing moet hebben.

$$a_n^{(p)} = C_1 n 4^n + C_2 2^n .$$

c. Geef de algemene oplossing van de recurrente betrekking.

Invullen geeft:

$$\begin{aligned} C_1 n 4^n + C_2 2^n - C_1 (n-1) 4^{n-1} - C_2 2^{n-1} - 12 C_1 (n-2) 4^{n-2} - 12 C_2 2^{n-2} &= 4^n + 2^n \\ C_1 n 4^n + C_2 2^n - \frac{1}{4} C_1 (n-1) 4^n - \frac{1}{2} C_2 2^n - \frac{12}{16} C_1 (n-2) 4^n - \frac{12}{4} C_2 2^n &= 4^n + 2^n \\ C_1 n 4^n - \frac{1}{4} C_1 n 4^n + C_2 2^n + \frac{1}{4} C_1 4^n - \frac{1}{2} C_2 2^n - \frac{12}{16} C_1 n 4^n + \frac{24}{16} C_1 4^n - 3 C_2 2^n &= 4^n + 2^n \\ C_2 2^n + \frac{1}{4} C_1 4^n - \frac{1}{2} C_2 2^n + \frac{24}{16} C_1 4^n - 3 C_2 2^n &= 4^n + 2^n \\ -\frac{5}{2} C_2 2^n + \frac{28}{16} C_1 4^n &= 4^n + 2^n \end{aligned}$$

Dit geeft

$$a_n^{(p)} = \frac{4}{7} n 4^n - \frac{2}{5} 2^n .$$

en daarmee

$$a_n = C 4^n + D (-3)^n + \frac{4}{7} n 4^n - \frac{2}{5} 2^n .$$
