

Tentamen Basisconcepten Wiskunde

24 Oktober 2014, 8.45-10.45.

Maak alle 7 opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren doorgaans niet goed. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + (\text{behaalde punten})/10$. Succes!

Opgave 1. (15 punten) Zij P , Q en R proposities. Bewijs of ontkracht

$$P \vee (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q) \rightarrow R.$$

Opgave 2. (10 punten) Zij A , B en C verzamelingen. Laat zien dat $A \subseteq C$ dan en slechts dan als $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Opgave 3. Laat A en B twee verzamelingen zijn, en $X \subseteq A$ en $Y \subseteq B$. Laat $f : A \rightarrow B$ een functie zijn.

(a) (5 punten) Bewijs dat $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(b) (10 punten) Bewijs dat $X = f^{-1}(f(X))$ dan en slechts dan als $X = f^{-1}(Z)$ voor zekere $Z \subseteq B$.

Opgave 4. (10 punten) Stel A en B zijn verzamelingen, en $f : A \rightarrow B$ is een functie. Stel dat f injectief is. Laat zien dat $f(P - Q) = f(P) - f(Q)$ voor alle $P, Q \subseteq A$.

Opgave 5. (15 punten) Laat $\sim$ de relatie op $\mathbb{R} - \{0\}$ zijn gedefinieerd door $x \sim y$ als $xy > 0$. Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Opgave 6. (10 punten) Laat met behulp van vermenigvuldigen modulo 16 zien dat voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt dat precies één van de volgende vier uitspraken waar is: $n^2 \equiv 0 \pmod{16}$, $n^2 \equiv 1 \pmod{16}$; $n^2 \equiv 4 \pmod{16}$; $n^2 \equiv 9 \pmod{16}$.

Opgave 7. (15 punten) We beschouwen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ en $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Beschouw de functie $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeven door $f(n) = (n+1)/2$ als n oneven is, en $f(n) = (-n)/2$ als n even is. Laat zien dat f een bijectie is.