

Maak alle opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren slecht. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Zij P, Q, R proposities. Bewijs of ontkracht

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R).$$

Opgave 2 (5+5 punten). Zij X, Y verzamelingen en $g : X \rightarrow Y$ een functie. Zij $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$. Bewijs voor elk van de volgende beweringen, dat de bewering correct is, of geef een tegenvoorbeeld.

- a) $g(g^{-1}(B)) \subseteq B$.
- b) $g^{-1}(g(A)) \subseteq A$.

Opgave 3 (10 punten). Zij $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Stel dat $\text{ggd}(a, c) = 1$ en $c|ab$. Bewijs dat $c|b$.

Opgave 4 (10 punten). Zij $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Bewijs dat f bijectief is en vind de inverse van f .

Opgave 5 (10 punten). Zij X een verzameling. Bewijs dat er een deelverzameling $Y \subseteq X$ is, zodat $X \sim X \times Y$. (Dat wil zeggen dat X en $X \times Y$ dezelfde kardinaliteit hebben.) *hint: Beschouw de gevallen $X = \emptyset$ en $X \neq \emptyset$ apart.*

Opgave 6 (10 punten). Zij G een groep en H een ondergroep van G . We definiëren de relatie R of G als volgt: voor $x, y \in G$ zeggen we dat xRy dan en slechts dan als er $p, q \in H$ zijn zodat $pxq = y$. Bewijs dat R een equivalentierelatie is op G .

Opgave 7 (10 punten). Geef **alle** oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x + 1 &\equiv 0 \pmod{2}, \\x &\equiv 2 \pmod{5}, \\x + 2 &\equiv 1 \pmod{3}.\end{aligned}$$

Opgave 8 (5+5 punten). Zij S_n de symmetrische groep: de groep van permutaties van n symbolen.

- a) Geef een element van orde 12 in S_7 .
- b) Hoeveel elementen heeft $S_3 \times S_3$? Hoeveel elementen van orde 2 zijn er in $S_3 \times S_3$? Leg kort uit hoe je aan deze antwoorden komt, maar je hoeft geen bewijs te geven.

Opgave 9 (10 punten). Bewijs, dat voor elke $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ dat

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}.$$