

Maak alle opgaven. Leg je antwoorden uit. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Bereken $\text{ggd}(561, 459)$ en vind getallen $x, y \in \mathbb{Z}$ zodat

$$\text{ggd}(561, 459) = 561x + 459y.$$

Opgave 2 (10 punten). Zij G_1 en G_2 groepen, en $f : G_1 \rightarrow G_2$ een homomorfisme. Bewijs dat

$$A = \{(x, y) \in G_1 \times G_2 \mid y = f(x)\},$$

een ondergroep is van $G_1 \times G_2$.

Opgave 3 (7+3 punten). Zij $\sigma \in S_9$ de permutatie

$$\sigma = (123)(1234)(56)(589).$$

- a) Schrijf σ als een product van disjuncte cycli.
- b) Wat is het cykeltype van σ ?

Opgave 4 (3+12 punten). Zij G een groep en $x \in G$.

- a) Geef de definitie van de *orde* van x .
- b) Zij H een groep en $f : G \rightarrow H$ een homomorfisme. Zij $x \in G$ een element van eindige orde. Bewijs dat de orde van $f(x)$ de orde van x deelt.

Opgave 5 (10 +10 punten).

- a) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ er geldt dat $n! > 2^n$.
- b) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ er geldt dat $7 \mid 11^n - 4^n$.

Opgave 6 (10 punten). Zij $a, b \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $a + b$ een priemgetal is. Bewijs dat

$$\text{ggd}(a, b) = 1.$$

Opgave 7 (15 punten). Herinner je het volgende. Voor elke $x \in (0, 1)$ hebben we een unieke decimale expansie

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots$$

van de volgende vorm. Voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_k \in \{0, \dots, 9\}$, en er is geen $N \in \mathbb{N}$ zodat $x_k = 9$ voor alle $k > N$. Bewijs dat de verzameling

$$S = \{0.x_1x_2x_3 \dots \in (0, 1) \mid x_5 = 3\}$$

overaftelbaar is.